Cohomologie des Groupes et Algèbres de Lie; l'Hypothèse de Riemann pour la Cohomologie Triviale des Algèbres de Lie Nilpotentes

Louis MAGNIN, Université de Bourgogne
Email: `magnin@u-bourgogne.fr`

Résumé

On présente d'abord les différentes notions d'homologie et de cohomologie pour les groupes de Lie avec leurs relations, puis on introduit l'hypothèse de Riemann sur la spectralité du tore maximal dans la cohomologie à valeur complexe des algèbres de Lie nilpotentes.

Introduction

Chacun de nous connaît au moins deux résultats qui sont des résultats homologiques.

- La fameuse *relation d'EULER* pour les polyèdres convexes de $\mathbb{R}^3$: si S, A, F désignent respectivement le nombre de faces, d'arêtes et de sommets , on a:
$$S - A + F = 2.$$
- Le *Théorème des Résidus* pour les fonctions d'une variable complexe.

1 Homologie

1.1 C'est quoi?

1.1.1 p-simplexe standard de $\mathbb{R}^p$

Soit $p \geqslant 1$ et $e_1^p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_p^p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On appelle *p-simplexe standard* de $\mathbb{R}^p$ l'enveloppe convexe

Δ_p de $\{e_1^p, \ldots, e_p^p\} \cup \{0\}$:

$$\Delta_p = \{x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i^p \; ; \lambda_i \geqslant 0 \; \forall i \; ; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \leqslant 1\}$$

Si l'on note e_0^p le vecteur nul, on a:

$$\Delta_p = \{x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i^p \; ; \lambda_i \geqslant 0 \; \forall i \; ; \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1\}.$$

$e_0^p, \ldots, e_p^p$ sont les *sommets* de Δ_p. Pour $p = 0$, on pose $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, $e_0^0 = 0$, et $\Delta_0 = \{e_0^0\}$.

1.1.2 p-simplexe singulier d'un espace topologique X

On appelle *p-simplexe singulier* d'un espace topologique X une application continue $\sigma : \Delta_p \to X$. (Le mot "singulier" ne se réfère pas à une non-différentiabilité éventuelle, mais au fait que σ peut avoir des points doubles, σ n'étant pas nécessairement injective.)

1.1.3 p-chaînes singulières d'un espace topologique X

Soit $S_p(X)$ l'ensemble dont les éléments sont les combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires formelles (finies) $\sum_\sigma \; n_\sigma \; \sigma$ de p-simplexes singuliers de X. $S_p(X)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre ayant pour base l'ensemble des p-simplexes singuliers de X. Notons que les expressions "$\mathbb{Z}$-module" et "groupe abélien" sont synonymes. Tout élément de $S_p(X)$ s'écrit par définition de façon unique sous la forme $\sum_\sigma \; n_\sigma \; \sigma$. Les éléments de $S_p(X)$ sont appelées p-chaînes singulières de X.

1.1.4 Opérateur bord

Pour $p \geqslant 1$, on appelle *i-ème face* (opposée au sommet numéro i) ($0 \leqslant i \leqslant p$) du p-simplexe standard Δ_p le $(p-1)$-simplexe singulier de $\mathbb{R}^p$ défini par l'application affine $\partial_p^{(i)} \Delta_p : \Delta_{p-1} \to \mathbb{R}^p$ qui envoie la suite des sommets $(e_0^{p-1}, \ldots, e_{p-1}^{p-1})$ de Δ_{p-1} sur la suite des sommets $(e_0^p, \ldots, \widehat{e_i^p}, \ldots, e_p^p)$ de Δ_p privée du sommet e_i^p. On a donc pour $x = \sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j e_j^{p-1} \in \Delta_{p-1}$: $\partial_p^{(i)} \Delta_p(x) = \sum_{0 \leqslant j < i} \lambda_j e_j^p + \sum_{i \leqslant j \leqslant p-1} \lambda_j e_{j+1}^p$. La *i-ème face* $\partial_p^{(i)} \sigma$ d'un p-simplexe singulier $\sigma : \Delta_p \to X$ est définie par composition : $\partial_p^{(i)} \sigma = \sigma \circ \partial_p^{(i)} \Delta_p$. On étend ensuite l'opérateur $\partial_p^{(i)}$ à $S_p(X)$ par $\mathbb{Z}$-linéarité: $\partial_p^{(i)} (\sum_\sigma \; n_\sigma \; \sigma) = \sum_\sigma \; n_\sigma \; \partial_p^{(i)} \sigma$.

On appelle alors *opérateur bord* l'opérateur $\partial_p : S_p(X) \to S_{p-1}(X)$ défini par $\partial_p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \partial_p^{(i)}$. Pour $p = 0$, on pose $\partial_0 = 0$. Pour alléger l'écriture, on omettra souvent l'indice p en écrivant simplement ∂ au lieu de ∂_p.

Lemme 1 $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0 \; \forall p \geqslant 1$

1.1.5 Complexe de chaînes singulier

On appelle *complexe de chaînes singulier* de X la suite infinie

$$\{0\} \xleftarrow{\partial_0} S_0(X) \xleftarrow{\partial_1} S_1(X) \xleftarrow{\partial_2} S_2(X) \ldots \xleftarrow{\partial_p} S_p(X) \xleftarrow{\partial_{p+1}} S_{p+1}(X) \ldots$$

On appelle *p-ième groupe d'homologie singulière de X* le $\mathbb{Z}$-module quotient

$$H_p(X) = Z_p(X) \,/\, B_p(X)$$

où $Z_p(X) = \operatorname{Ker} \partial_p$ et $B_p(X) = \operatorname{Im} \partial_{p+1}$. Les éléments de $Z_p(X)$ sont appelés *p-cycles* et ceux de $B_p(X)$ *p-bords*. Si z et w sont deux p-cycles homologues, on notera $z \equiv w$; la classe d'homologie de z est notée $[z]$.

1.2 $\pi_1(X)$ et $H_1(X)$

1.2.1 groupe d'homotopie $\pi_1(X)$

Un *chemin basé en* $x_0 \in X$ est une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Soit $\mathcal{C}(X, x_0)$ l'ensemble des chemins basés en x_0.

$\gamma, \gamma' \in \mathcal{C}(X, x_0)$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que $F(0,t) = \gamma(t)$ et $F(1,t) = \gamma'(t)$ $\forall t$. On note alors $\gamma \sim \gamma'$. On désigne par $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie des chemins basés en x_0:

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\gamma];\ \gamma \in \mathcal{C}(X, x_0)\}$$

où $[\gamma]$ désigne la classe d'homotopie de γ. Le composé de deux chemins $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}(X, x_0)$ est le chemin $\gamma_1 \star \gamma_2$ défini par

$$(\gamma_1 \star \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

On vérifie que si $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ et $\gamma_2 \sim \gamma_2'$ alors $\gamma_1 \star \gamma_2 \sim \gamma_1' \star \gamma_2'$ de sorte que $[\gamma_1] \star [\gamma_2] = [\gamma_1 \star \gamma_2]$ est bien défini.

$\pi_1(X, x_0)$ est un groupe pour la loi $\star$ (en général nonabélien si X n'est pas un groupe topologique).

Si X est localement connexe par arcs, le groupe $\pi_1(X, x_0)$ ne dépend pas (à isomorphisme près) du point $x_0 \in X$. On note alors simplement $\pi_1(X)$ au lieu de $\pi_1(X, x_0)$.

X est dit *simplement connexe* s'il est localement connexe par arcs et $\pi_1(X) = \{0\}$.

1.2.2 lien avec l'homologie

On a $\mathcal{C}(X, x_0) \subset Z_1(X)$. En effet, tout $\gamma \in \mathcal{C}(X, x_0)$ est un 1-simplexe singulier de X et son bord est $\partial_1 \gamma = \gamma(1) - \gamma(0) = 0$, i.e. $\gamma \in Z_1(X)$. Soit $\chi : \mathcal{C}(X, x_0) \longrightarrow Z_1(X)$ l'injection canonique. Pour $\gamma, \gamma' \in \mathcal{C}(X, x_0)$, on note $\gamma \equiv \gamma'$ si γ et γ' sont homologues comme éléments de $Z_1(X)$, i.e. $\gamma - \gamma' \in B_1(X)$ ou encore $\chi(\gamma) - \chi(\gamma') \in B_1(X)$.

1.2.3

Théorème 1 *1. Si* $\gamma, \gamma' \in \mathcal{C}(X, x_0)$ *sont homotopes, ils sont homologues:*

$$\gamma \sim \gamma' \implies \gamma \equiv \gamma'.$$

L'application χ *passe aux quotients et définit une application*

$$\bar{\chi} : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$$

telle que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(X, x_0) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "proj"'] & Z_1(X) \arrow[d, "proj"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\bar{\chi}"] & H_1(X)
\end{tikzcd}$$

2. On a pour $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}(X, x_0)$*,* $\gamma_1 \star \gamma_2 \equiv \gamma_1 + \gamma_2$ *,i.e.* $\chi(\gamma_1 \star \gamma_2) \equiv \chi(\gamma_1) + \chi(\gamma_2)$*. L'application* $\bar{\chi}$ *est donc un homomorphisme de groupes.*
3. Si X *est connexe par arcs,* $\bar{\chi}$ *est surjectif, de noyau* $Ker\ \bar{\chi} = \mathcal{D}(\pi_1(X, x_0))$ *où* $\mathcal{D}(\pi_1(X, x_0))$ *est le groupe dérivé de* $\pi_1(X, x_0)$ *(i.e. engendré par les commutateurs* $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ *d'éléments* α, β *du groupe). On a donc un isomorphisme de groupes abéliens (i.e.* $\mathbb{Z}$*-modules)*

$$H_1(X) \cong \pi_1(X, x_0) / \mathcal{D}(\pi_1(X, x_0)) \,.$$

1.2.4

Si X est simplement connexe, alors $H_1(X) = \{0\}$.
La réciproque est vraie pour un ouvert de $\mathbb{C}$:

Théorème 2 *Un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}$ *est simplement connexe si et seulement si* $H_1(\Omega) = \{0\}$*.*

1.2.5 caractérisation de $B_1(\Omega)$ par l'indice pour un ouvert de $\mathbb{C}$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et $\gamma \in Z_1(\Omega)$ de classe C^1 par morceaux, i.e. $\gamma = \sum_\sigma n_\sigma\ \sigma$ avec des 1-simplexes singuliers $\sigma : \Delta_1 = [0,1] \longrightarrow \Omega$ de classe C^1 par morceaux. On note $\gamma^* = \bigcup_\sigma \sigma(\Delta_1)$, et, pour une fonction f continue sur γ^*, $\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_\sigma n_\sigma \int_\sigma f(\zeta) d\zeta$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. L'indice de z par rapport à γ est défini par $Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$. La fonction $f : z \mapsto Ind_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, nulle sur la composante connexe non bornée.

Théorème 3 $\gamma \in B_1(\Omega) \iff Ind_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$

1.2.6 Théorème de Cauchy global

Théorème 4 *Soit* $\gamma \in B_1(\Omega)$ *de classe* C^1 *par morceaux. Pour toute fonction* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *holomorphe dans* Ω*, on a:*
i) $\int_\gamma f(z)dz = 0$
ii) $f(z)Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

1.2.7 Application: Théorème des résidus

Théorème 5 *Soit* $\Omega' = \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$*,* $f : \Omega' \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe dans* Ω' *et* $\gamma \in B_1(\Omega)$ *de classe* C^1 *par morceaux ne passant par aucun des points* a_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ *(on a donc* $\gamma \in Z_1(\Omega')$*). Alors:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{p} Ind_\gamma(a_k)Res(f, a_k)$$

où $Res(f, a_k)$ *désigne le résidu de* f *au point* a_k*.*

Démonstration.

On isole chaque a_k par un cercle $c_k : t \mapsto a_k + r_k e^{it} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ avec des $r_k > 0$ tels que les disques $D(a_k, r_k)$ soient 2 à 2 disjoints contenus dans Ω et que chaque cercle $C(a_k, r_k) = c_k^*$ ait une intersection vide avec γ^*. Soit alors $\delta = \gamma - \sum_{k=1}^{p} Ind_\gamma(a_k)\ c_k$. Si $z = a_k$, on a $Ind_\delta(a_k) = 0$. Si $z \notin \Omega$, on a $Ind_\delta(z) = 0$. On a donc $Ind_\delta(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega'$, et par conséquent $\delta \in B_1(\Omega')$. Le Théorème de Cauchy global s'applique donc et donne $\int_\delta f(z)dz = 0$, donc $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} Ind_\gamma(a_k) \int_{c_k} f(z)dz$. D'où le résultat puisque $\int_{c_k} f(z)dz = 2i\pi Res(f, a_k)$ d'après le développement de Laurent de f en a_k.

1.3 Exemples

1.3.1

Si $X = \{a\}$, pour tout $p \geqslant 0$ il existe un seul p-simplexe singulier: le simplexe constant $\sigma_p : \Delta_p \to \{a\}$. Alors $S_p(\{a\}) = \mathbb{Z}\sigma_p \cong \mathbb{Z}$ et $\partial_p^{(i)}\sigma_p = \sigma_{p-1}$, donc pour $p \geqslant 1$

$$\partial_p \sigma_p = \left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\right).\sigma_{p-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ impair} \\ \sigma_{p-1} & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$$

i.e. $Z_p(\{a\}) = B_p(\{a\}) = S_p(\{a\})$ si p est impair et $Z_p(\{a\}) = B_p(\{a\}) = \{0\}$ si p pair. Pour $p = 0$, $Z_0(\{a\}) = S_0(\{a\})$ par définition, et $B_0(\{a\}) = \{0\}$ d'après ce qui précède. On a donc:

$$\begin{cases} H_p(\{a\}) = \{0\} \quad \forall p \geqslant 1 \\ H_0(\{a\}) \cong \mathbb{Z} \end{cases}$$

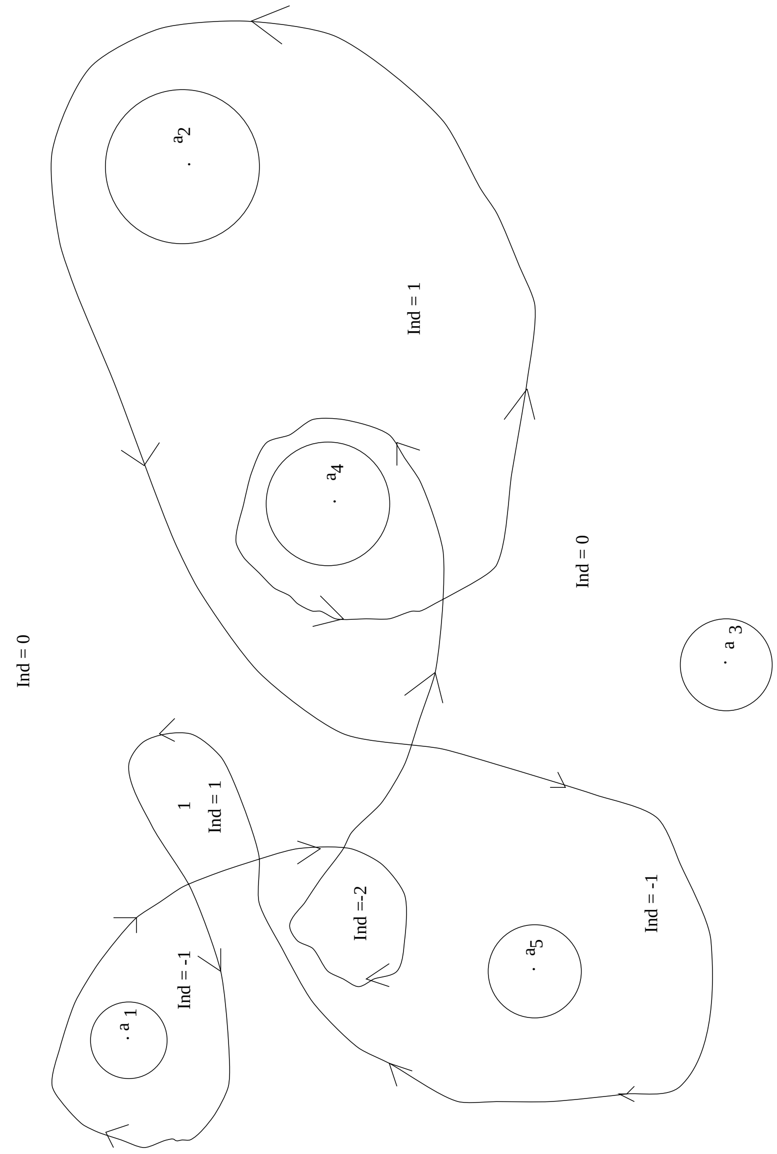

Fig. 1: *un chemin γ et la valeur de l'indice dans les diverses composantes connexes de* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$

1.3.2

Soit $\varepsilon : S_0(X) \to \mathbb{Z}$ définie par $\varepsilon\left(\sum_{x\in X} n_x\ x\right) = \sum_{x\in X} n_x$. Alors $B_0(X) \subset Ker\ \varepsilon$ avec égalité si X est connexe par arcs. Dans ce cas, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Si X n'est pas connexe par arcs, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^k$ où k est le cardinal de l'ensemble des composantes connexes par arcs de X.

1.3.3

Si $\{X_\alpha\ ;\ \alpha \in A\}$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X, $H_p(X) = \prod_{\alpha\in A} H_p(X_\alpha)\ \forall p \geqslant 0$.

1.4 Conditions sur X, Y impliquant $H_p(X) \cong H_p(Y)\ \forall p$

1.4.1

Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ continue. Soit $p \geqslant 0$. Pour tout p-simplexe singulier σ de X, $f_{\sharp,p}(\sigma) = f \circ \sigma$ est un p-simplexe singulier de Y. On définit $f_{\sharp,p} : S_p(X) \to S_p(Y)$ par $\mathbb{Z}$-linéarité en posant $f_{\sharp,p}\left(\sum_\sigma n_\sigma\ \sigma\right) = \sum_\sigma n_\sigma\ f_{\sharp,p}(\sigma)$. On a alors $f_{\sharp,p-1} \circ \partial_p = \partial_p \circ f_{\sharp,p}\ \forall p \geqslant 1$ de sorte que $f_{\sharp,p}$ passe aux quotients et définit $f_{*,p} : H_p(X) \to H_p(Y)$. On a $Id_{*,p} = Id$ et si Z est un autre espace topologique et $g : Y \to Z$ une application continue, $(g \circ f)_{*,p} = g_{*,p} \circ f_{*,p}$ En particulier, si f est un homéomorphisme, $f_{*,p}$ est un isomorphisme. L'homologie est donc un invariant topologique. On va donner des cas plus généraux où $f_{*,p}$ est encore un isomorphisme pour tout $p \geqslant 0$.

1.4.2

Comme dans le cas des chemins , deux application continues $f, f' : X \to Y$ sont sont *homotopes* s'il existe une application continue $F : [0,1] \times X \to Y$ telle que $F(0,x) = f(x)$ et $F(1,x) = f'(x)\ \forall x \in X$, et l'on note $f \sim f'$.

Lemme 2 *Si $f, f' : X \to Y$ sont deux applications continues homotopes, alors $f_{*,p} = f'_{*,p}\ \forall p \geqslant 0$.*

1.4.3

Corollaire 1 *Soit $f : X \to Y$ continue. Si f est une équivalence-homotopie (i.e. il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ f \sim Id_X$ et $f \circ g \sim Id_Y$), alors $f_{*,p}$ un isomorphisme pour tout $p \geqslant 0$.*

Corollaire 2 *Soit $X \subset Y$ et $i : X \to Y$ l'injection canonique. Si X est un déformation-rétract de Y (i.e. il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $g \circ i = Id_X$ et $i \circ g \sim Id_Y$), alors $i_{*,p}$ est un isomorphisme pour tout $p \geqslant 0$.*

Corollaire 3 *Si X est contractile, i.e. il existe $a \in X$ tel que Id_X soit homotope à l'application constante $\tilde{a} : x \mapsto a$, alors $H_p(X) \cong H_p(\{a\})\ \forall p \geqslant 0$.*

En effet, $\{a\}$ est un déformation-rétract de X.

1.4.4 Exemples

1. Tout convexe de $\mathbb{R}^n$ est contractile.

2. La sphère $\mathbb{S}^{n-1}(n \geqslant 1)$ est un déformation-rétract de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En effet, si $i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est l'injection canonique et $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ est définie par $g(x) = \frac{x}{||x||}$, on a $g \circ i = Id_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et $i \circ g \sim Id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, avec pour homotopie de $i \circ g$ sur $Id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ l'application $F : [0,1] \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ définie par $F(t,x) = (1-t)x + t\frac{x}{||x||}$.

1.5 Calcul de l'homologie: suite de Mayer-Vietoris

Dans toute cette section, on suppose que X est la réunion de deux ouverts U et V.

1.5.1

Théorème 6 *Si X est la réunion de deux ouverts U et V, alors:*
1. Pour toute p-chaîne $z \in S_p(X)$, il existe une p-chaîne $w \in S_p(X)$ de la forme $w = z_U + z_V$ avec $z_U \in S_p(U)$ et $z_V \in S_p(V)$ telle que $\partial z = \partial w$;
2. Si z est un p-cycle de X alors $z, w \in Z_p(X)$ sont homologues: $[z] = [w]$.

1.5.2

Pour $p \geqslant 0$, considérons les applications

$$\begin{array}{rccc} g_p : & S_p(U \cap V) & \longrightarrow & S_p(U) \oplus S_p(V) \\ & z & \mapsto & (z, -z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} h_p : & S_p(U) \oplus S_p(V) & \longrightarrow & S_p(X) \\ & (z_U, z_V) & \mapsto & z_U + z_V \end{array}$$

Lemme 3 *Ker h_p = Im g_p $\forall p \geqslant 0$*

Démonstration.

Si $(z_U, z_V) \in$ Ker h_p, on a $z_U + z_V = 0$ et cela implique $z = z_U = -z_V \in S_p(U \cap V)$. En effet, z_U est de la forme $\sum_j n_j \sigma_{U,j}$ où $\sigma_{U,j}$ est un p-simplexe de U et $-z_V$ est de la forme $\sum_k m_k \sigma_{V,k}$ où $\sigma_{V,k}$ est un p-simplexe de V. On a donc deux décompositions du *même élément* z dans le $\mathbb{Z}$-module libre $S_p(X)$ et par conséquent elles sont identiques, i.e. $\forall j\ \exists k\ \sigma_{U,j} = \sigma_{V,k}$ et alors $n_j = m_k$. Cela prouve que Ker $h_p \subset$ Im g_p, d'où l'égalité , l'inclusion réciproque étant claire.

1.5.3

g_p et h_p définissent (avec des notations évidentes):

$$\begin{array}{rccc} g_{*,p}: & H_p(U\cap V) & \longrightarrow & H_p(U)\oplus H_p(V) \\ & [z]_{U\cap V} & \mapsto & ([z]_U, -[z]_V) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} h_{*,p}: & H_p(U)\oplus H_p(V) & \longrightarrow & H_p(X) \\ & ([z_U]_U, [z_V]_V) & \mapsto & [z_U + z_V]_X \end{array}$$

Lemme 4 *Ker* $h_{*,p} =$ *Im* $g_{*,p}\ \forall p \geqslant 0$

Démonstration.

Soit $([z_U]_U, [z_V]_V) \in \text{Ker } h_{*,p}$. On a $[z_U + z_V]_X = 0$, donc $z_U + z_V = \partial c$ avec $c \in S_{p+1}(X)$. Soit $c' \in S_{p+1}(X)$ de la forme $c' = c_U + c_V$, avec $\partial c' = \partial c$, $c_U \in S_{p+1}(U)$, $c_V \in S_{p+1}(V)$. Alors $z_U + z_V = \partial c' = \partial c_U + \partial c_V$ d'où $z_U - \partial c_U = -(z_V - \partial c_V)$ ce qui implique d'après le lemme précédent $z_U - \partial c_U = -(z_V - \partial c_V) \in S_p(U\cap V)$.

Cela prouve que Ker $h_{*,p} \subset$ Im $g_{*,p}$, d'où l'égalité , l'inclusion réciproque étant claire.

1.5.4 le morphisme de connexion

On définit le *morphisme de connexion*

$$\delta_{p+1} : H_{p+1}(X) \to H_p(U\cap V)$$

comme suit.

Soit $z \in Z_{p+1}(X)$. z est homologue à un $(p+1)$-cycle de la forme $w = z_U + z_V$, $z_U \in S_{p+1}(U)$, $z_V \in S_{p+1}(V)$. On a $\partial z_U + \partial z_V = \partial w = 0$, donc $(\partial z_U, \partial z_V) \in \text{Ker } h_p$. Or Ker $h_p =$ Im g_p, donc $\partial z_U \in S_p(U\cap V)$. La classe d'homologie $[\partial z_U]_{U\cap V} \in H_p(U\cap V)$ ne dépend pas du $w = z_U + z_V$ utilisé, mais seulement de la classe d'homologie $[z] \in H_{p+1}(X)$ de z. En effet, si $w' = z'_U + z'_V$, $z'_U \in S_{p+1}(U)$, $z'_V \in S_{p+1}(V)$ est un autre $(p+1)$-cycle homologue à z, on a $z_U - z'_U + z_V - z'_V \in B_p(X)$. Comme dans la démonstration du lemme précédent, cela implique qu'il existe $c_U \in S_{p+1}(U)$ tel que $z_U - z'_U - \partial c_U \in S_p(U\cap V)$, d'où $\partial z_U - \partial z'_U \in B_p(U\cap V)$.

On pose $\delta_{p+1}([z]) = [\partial z_U]_{U\cap V} \in H_p(U\cap V)$.

1.5.5 La suite de Mayer-Vietoris

Théorème 7 *Si X est la réunion de deux ouverts U et V, on a une suite exacte longue d'homologie*

$$\ldots \longrightarrow H_p(U\cap V) \xrightarrow{g_{*,p}} H_p(U)\oplus H_p(V) \xrightarrow{h_{*,p}} H_p(X) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(U\cap V) \xrightarrow{g_{*,p-1}} \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H_0(U\cap V) \xrightarrow{g_{*,0}} H_0(U)\oplus H_0(V) \xrightarrow{h_{*,0}} H_0(X).$$

Démonstration.

Il reste à montrer que Im $h_{*,p}$ = Ker δ_p et Im δ_p = Ker $g_{*,p-1}$ $\forall p \geqslant 1$.

Montrons que Im $h_{*,p}$ = Ker δ_p.

Notons d'abord que Im $h_{*,p}$ est l'ensemble des classes d'homologie $[z]$ qui possèdent un représentant de la forme $w = z_U + z_V$ où z_U et z_V sont des *p-cycles* de U et V. Comme par définition, $\delta_p([z]) = [\partial z_U]_{U\cap V}$ on voit que Im $h_{*,p} \subset$ Ker δ_p.

Soit maintenant $[z] \in$ Ker δ_p. z est homologue à un p-cycle de la forme $w = z_U + z_V$, $z_U \in S_p(U)$, $z_V \in S_p(V)$, et l'on a $\delta_p([z]) = [\partial z_U]_{U\cap V} = 0$, donc $\partial z_U \in B_{p-1}(U \cap V)$, i.e. il existe $z'_{U\cap V} \in S_p(U \cap V)$ tel que $\partial z_U = \partial z'_{U\cap V}$. Alors $z_U - z'_{U\cap V}$ et $z_V + z'_{U\cap V}$ sont des *p-cycles* dont la somme est w, donc $[z] \in$ Im $h_{*,p}$. Cela prouve que Ker $\delta_p \subset$ Im $h_{*,p}$.

Montrons maintenant que Im δ_p = Ker $g_{*,p-1}$.

D'abord Im $\delta_p \subset$ Ker $g_{*,p-1}$. En effet, pour un p-cycle $z \in Z_p(X)$, on par définition $\delta_p([z]) = [\partial z_U]_{U\cap V}$, où $w = z_U + z_V$ est un p-cycle homologue à z tel que $z_U \in S_p(U)$, $z_V \in S_p(V)$. Alors $\partial z_U = -\partial z_V$, $[\partial z_U]_U = 0$ et $[\partial z_U]_V = -[\partial z_V]_V = 0$ donc $\delta_p([z]) \in$ Ker $g_{*,p-1}$.

Soit maintenant $\zeta \in Z_{p-1}(U \cap V)$ tel que $[\zeta]_{U\cap V} \in$ Ker $g_{*,p-1}$, i.e. $[\zeta]_U = [\zeta]_V = 0$. On a donc $\zeta \in B_{p-1}(U)$ et $\zeta \in B_{p-1}(V)$. Soit $z_U \in S_p(U), z_V \in S_p(V)$ tels que $\zeta = \partial z_U = \partial z_V$. Alors $z = z_U - z_V \in Z_p(X)$ et $\delta_p([z]) = [\partial z_U]_{U\cap V} = [\zeta]_{U\cap V}$ donc $[\zeta]_{U\cap V} \in$ Im δ_p. Cela prouve que Ker $g_{*,p-1} \subset$ Im δ_p.

1.6 Exemple: homologie de la sphère $\mathbb{S}^n$ $(n \geqslant 1)$

1.6.1

Soit N le pôle nord de $\mathbb{S}^n$, S le pôle sud , $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}, V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. U et V sont homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ par la projection stéréographique, donc $H_p(U) = H_p(V) = \{0\}$ $\forall p \geqslant 1$. $U \cap V$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, donc $H_p(U \cap V) \cong H_p(\mathbb{S}^{n-1})$ puisque $\mathbb{S}^{n-1}$ est un déformation-rétract de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La suite de Mayer-Vietoris se scinde et donne pour tout $p \geqslant 2$ la suite exacte courte:

$$\{0\} = H_p(U) \oplus H_p(V) \xrightarrow{h_{*,p}} H_p(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(U \cap V) \cong$$
$$\cong H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{g_{*,p-1}} H_{p-1}(U) \oplus H_{p-1}(V) = \{0\}$$

On a donc pour $p \geqslant 2$:

$$H_p(\mathbb{S}^n) \cong H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \ldots \cong \begin{cases} H_{p-n+1}(\mathbb{S}^1) & \text{si } p \geqslant n \\ H_1(\mathbb{S}^{n-p+1}) & \text{si } p < n \end{cases}$$

de sorte que le calcul de $H_p(\mathbb{S}^n)$ est ramené au calcul de $H_1(\mathbb{S}^n)$ et $H_p(\mathbb{S}^1)$.

1.6.2 calcul de $H_1(\mathbb{S}^n)$ $n \geqslant 1$

La suite de Mayer-Vietoris donne (pour $p = 1$) la suite exacte courte:

$$\{0\} = H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{h_{*,1}} H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\delta_1} H_0(U \cap V) \cong H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{g_{*,0}}$$

$$\xrightarrow{g_{*,0}} H_0(U) \oplus H_0(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{h_{*,0}} H_0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}.$$

δ_1 est donc injective et $H_1(\mathbb{S}^n) \cong \mathrm{Im}\ \delta_1 = \mathrm{Ker}\ g_{*,0}$.

Si $n \geqslant 2$, $U \cap V$ est connexe par arcs, donc si x est un point fixé de $U \cap V$, $H_0(U \cap V) = \mathbb{Z} \cdot [x]_{U\cap V} \cong \mathbb{Z}$. Or pour $n \in \mathbb{Z}$ $\quad g_{*,0}(n[x]_{U\cap V}) = (n[x]_U, n[x]_V)$, donc Ker $g_{*,0} = \{0\}$ et $H_1(\mathbb{S}^n) = \{0\}$.

Si $n = 1$, $U \cap V$ a deux composantes connexes par arcs, donc si x, y sont deux points fixés respectivement dans chacune des composantes de $U \cap V$, $H_0(U \cap V) = \mathbb{Z} \cdot [x]_{U\cap V} \oplus \mathbb{Z} \cdot [y]_{U\cap V} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. On a dans ce cas pour $n, m \in \mathbb{Z}$ $g_{*,0}(n[x]_{U\cap V} + m[y]_{U\cap V}) = (n[x]_U + m[y]_U, n[x]_V + m[y]_V) = ((n+m)[x]_U, (n+m)[x]_V)$ car, dans U, $x \equiv y$ et pareillement dans V. Donc Ker $g_{*,0} = \mathbb{Z} \cdot [x - y]_{U\cap V}$ et $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

1.6.3

Pour $p \geqslant 2$, on a $H_p(\mathbb{S}^1) \cong H_{p-1}(\mathbb{S}^0) \cong H_{p-1}(\{-1\}) \oplus H_{p-1}(\{1\}) = \{0\}$

1.6.4

On a donc en conclusion:

$$H_p(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \\ \{0\} & \text{si } 1 \leqslant p < n \text{ ou } p > n \end{cases}$$

1.7 Nombres de Betti; caractéristique d'Euler-Poincaré

1.7.1

Soit E un $\mathbb{Z}$-module. Rappelons que E est dit *libre* s'il admet une base sur $\mathbb{Z}$. Un élément a de E est dit *de torsion* s'il existe $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, tel que $na = 0$. S'il n'existe pas d'élément de torsion non nul, E est dit *sans torsion.*

Exemple: $\mathbb{Q}$ est sans torsion, mais *n'est pas* un $\mathbb{Z}$-module libre. En effet, pour $a, b \in \mathbb{Q}^*, a \neq b, a = \frac{p}{q}, b = \frac{r}{s}$, $(p, r \in \mathbb{Z}^*, q, s \in \mathbb{N}^*)$, on a $na + mb = 0$ si l'on choisit $n = qr$ et $m = -ps$, donc une base de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Z}$ n'aurait *qu'un seul* élément , ce qui est impossible.

On a la même situation pour $\mathbb{R}$ puisque tout sous-$\mathbb{Z}$-module d'un $\mathbb{Z}$-module libre est libre.

1.7.2 Classification des $\mathbb{Z}$-modules finiment engendrés

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ notons $\mathbb{Z}_m$ le groupe quotient $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Théorème 8 *Soit E un $\mathbb{Z}$-module finiment engendré. Alors*

$$E \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{r\ fois} \oplus \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_\ell}$$

où $r \in \mathbb{N}$ et pour chaque i, $1 \leqslant i < \ell$, m_i divise m_{i+1}.

$\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^r$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini; r est appelé *rang* de E et noté $\mathrm{rg}(E)$.

$\mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_\ell}$ est appelé le sous-module de torsion de E; la suite $(m_1, \ldots, m_\ell)$ est la suite des *facteurs de torsion* de E.

1.7.3

Soit X un espace topologique. Pour $p \in \mathbb{N}$, si $H_p(X)$ est finiment engendré, on appelle *p-ième nombre de Betti* de X et l'on note $b_p(X)$ le rang de $H_p(X)$. Si $H_p(X)$ n'est pas finiment engendré, on pose $b_p(X) = \infty$.

Si $b_p(X) < \infty$ $\forall p \in \mathbb{N}$, et si $b_p(X)$ est nul sauf pour un nombre fini d'indices p, on appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* de X le nombre

$$\chi(X) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p b_p(X).$$

Le polynôme $P_X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p(X) t^p \in \mathbb{Z}[t]$ est le *polynôme de Poincaré*. On a donc $\chi(X) = P_X(-1)$.

Exemple: Pour $X = \mathbb{S}^n$,

$$\chi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$P_{\mathbb{S}^n}(t) = 1 + t^n.$$

1.8 Théorème des coefficients

$S_p(X)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre ayant pour base l'ensemble des p-simplexes singuliers de X. On peut définir de même si $\mathbb{k}$ est un corps commutatif $S_p(X, \mathbb{k})$ comme le $\mathbb{k}$-espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des p-simplexes singuliers de X. Le lien entre $S_p(X)$ et $S_p(X, \mathbb{k})$ est donné par la notion de *produit tensoriel de $\mathbb{Z}$-modules* qui permettra aussi de définir $S_p(X, E)$ pour tout $\mathbb{Z}$-module E.

1.8.1 produit tensoriel de $\mathbb{Z}$-modules

Théorème 9 *Soient E et F deux $\mathbb{Z}$-modules. Il existe un $\mathbb{Z}$-module unique à isomorphisme près noté $E \otimes_{\mathbb{Z}} F$ tel que:*

1. Il existe une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire $\pi : E \times F \longrightarrow E \otimes_{\mathbb{Z}} F$ dont l'image engendre $E \otimes_{\mathbb{Z}} F$.

2. Pour tout $\mathbb{Z}$-module G et toute application $\mathbb{Z}$-bilinéaire $f : E \times F \longrightarrow G$, il existe une unique application $\mathbb{Z}$-linéaire $g : E \otimes_{\mathbb{Z}} F \longrightarrow G$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G \\
E \otimes_{\mathbb{Z}} F \arrow[ur, phantom, "g"] &
\end{tikzcd}$$

On note pour $x \in E, y \in F$: $x \otimes y = \pi(x, y)$.

1.8.2 propriétés essentielles du produit tensoriel

(i) $E \otimes_{\mathbb{Z}} F \cong F \otimes_{\mathbb{Z}} E$ (isomorphisme défini par $x \otimes y \mapsto y \otimes x$)

(ii) $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong E$ (isomorphismes réciproques définis par $x \otimes n \mapsto nx$ et $x \mapsto x \otimes 1$)

(iii) Si F est un $\mathbb{Z}$-module libre de base $(f_j)_{j \in J}$, tout élément de $E \otimes_{\mathbb{Z}} F$ s'écrit de façon unique $\sum_j x_j \otimes f_j$ avec $x_j \in E, x_j = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices.

(iv) Si $\mathbb{k}$ est un corps commutatif, $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}$-*espace vectoriel*. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$, l'application $f_\lambda : E \times \mathbb{k} \longrightarrow E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ définie par $(x, \mu) \mapsto x \otimes \lambda\mu$ est $\mathbb{Z}$-bilinéaire donc définit une application $\mathbb{Z}$-linéaire $g_\lambda : E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k} \longrightarrow E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ telle que $g_\lambda(x \otimes \mu) = x \otimes \lambda\mu$. Si l'on pose $\lambda z = g_\lambda(z)$ pour $z \in E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}, \lambda \in \mathbb{k}$, on vérifie facilement que $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}$-*espace vectoriel*.

Pour toute application $\mathbb{Z}$-linéaire f de E dans un $\mathbb{k}$-espace vectoriel V, il existe une application $\mathbb{k}$-linéaire unique g du $\mathbb{k}$-espace vectoriel $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ dans V telle que $g(x \otimes 1) = f(x)\ \forall x \in E$. En effet, l'application $(x, \lambda) \longmapsto \lambda f(x)$ est $\mathbb{Z}$-bilinéaire donc définit une application $\mathbb{Z}$-linéaire $g : E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k} \longrightarrow V$. Il est immédiat que g est $\mathbb{k}$-linéaire et est l'unique application répondant à la question.

L'application $f \longmapsto g$ est un $\mathbb{Z}$-isomorphisme du $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E, V)$ des application $\mathbb{Z}$-linéaires de E dans V sur le $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}, V)$ des application $\mathbb{k}$-linéaires de $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ dans V.

Notons enfin que pour que l'application canonique $x \longmapsto x \otimes 1$ de E dans $E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ soit injective il suffit que E soit un $\mathbb{Z}$-module libre.

1.8.3 homologie à coefficients dans E

Pour tout $\mathbb{Z}$-module E, on pose

$$S_p(X, E) = S_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} E$$

Tout élément de $S_p(X, E)$ s'écrit de façon unique $\sum_j g_j \otimes \sigma_j$ avec $g_j \in E$ ($g_j = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices) et $\sigma_j \in \Sigma_p(X)$ ($\Sigma_p(X)$ étant l'ensemble des p-simplexes singuliers de X).

En particulier,

$$S_p(X, \mathbb{R}) = \{\sum_j g_j \otimes \sigma_j; g_j \in \mathbb{R}; \sigma_j \in \Sigma_p(X)\}$$

$$S_p(X, \mathbb{Z}) \cong S_p(X)$$

L'opérateur bord ∂ possède un prolongement naturel à $S_p(X, E)$ et permet de définir $H_p(X, E)$.

Nous identifierons $S_p(X, \mathbb{Z})$ et $S_p(X)$, donc $H_p(X, \mathbb{Z}) = H_p(X)$.

1.8.4 Théorème des coefficients universel pour l'homologie

Théorème 10 *Pour tout $\mathbb{Z}$-module E, on a:*

$$H_p(X,E) = (H_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} E) \,\oplus\, Tor\,(H_{p-1}(X), E) \;\forall p \geqslant 0$$

où $Tor\,(H_{p-1}(X), E)$ est un $\mathbb{Z}$-module qui est nul si E ou $H_{p-1}(X)$ est sans torsion (on pose $H_{-1}(X) = \{0\}$).

1.8.5 Invariance de l'homologie par extension du *corps de base*

Corollaire 4 *Pour tout corps commutatif $\mathbb{k}$, on a:*

$$dim_{\mathbb{k}}\, H_p(X,\mathbb{k}) = b_p(X) \quad \forall p \geqslant 0$$

Démonstration.

Par définition, $b_p(X) = \mathrm{rg}\; H_p(X)$. Si $\dim_{\mathbb{k}}\, H_p(X,\mathbb{k})$ ou $b_p(X)$ est infini, les deux sont infinis. Supposons donc $b_p(X) < +\infty$. Alors

$$H_p(X) \cong \mathbb{Z}^r \oplus\, \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_\ell}$$

où $r = b_p(X)$ et $(m_1, \ldots, m_\ell)$ est la suite des facteurs de torsion de $H_p(X)$. Comme un corps est sans torsion, on a

$$\begin{aligned} H_p(X,\mathbb{k}) &= H_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k} \\ &\cong (\mathbb{Z}^r \oplus\, \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_\ell}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k} \\ &\cong (\mathbb{Z}^r \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}) \,\oplus\, (\mathbb{Z}_{m_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}) \,\oplus\, \ldots \,\oplus\, (\mathbb{Z}_{m_\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}) \end{aligned}$$

Or $\mathbb{Z}^r \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{k}^r$ et pour tout m, $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{k} = \{0\}$ puisque pour toute classe $[x]_m$ modulo m on a: $[x]_m \otimes 1 = m[x]_m \otimes \frac{1}{m} = 0 \otimes \frac{1}{m} = 0$. Ainsi: $\dim_{\mathbb{k}}\, H_p(X,\mathbb{k}) = r = b_p(X)$.

1.9 Homologie des CW-complexes et des polyèdres

1.9.1 CW-complexes finis

On appelle *CW-complexe fini* ("C" est pour "closure finite" et "W" pour "weak topology", des conditions redondantes ici car le complexe est *fini*) la donnée d'un espace compact X et d'une suite finie de compacts

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n = X$$

telle que X_0 est fini et pour tout $1 \leqslant p \leqslant n$, X_p se déduit de X_{p-1} par *adjonction d'un nombre fini $k_p \geqslant 0$ de p-cellules.* Cela signifie que $X_p \backslash X_{p-1} = \bigcup_{\lambda=1}^{k_p} c_\lambda^p$ où, pour chaque λ, c_λ^p est homéomorphe à la boule unité ouverte B_p de $\mathbb{R}^p$ et il existe une application continue f_λ^p de la boule fermée $\overline{B_p}$ dans l'adhérence $\overline{c_\lambda^p}$ telle que $f_\lambda^p(\mathbb{S}^{p-1}) \subset X_{p-1}$ et que f_λ^p soit un homéomorphisme de B_p sur c_λ^p. Les c_λ^p sont les p-cellules de la structure de CW-complexe de X. Le plus petit n tel que $X_n = X$ et $X_{n-1} \neq X_n$ est la *dimension* du CW-complexe.

1.9.2 Exemples

1. Pour tout n la sphère $\mathbb{S}^n$ est un CW-complexe fini ayant seulement une 0-cellule (le pôle Nord N) et une n-cellule ($\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$).

2. Soit P un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$ et X sa surface. Par définition, P est l'intersection d'un nombre fini ≥ 4 de demi-plans non parallèles; les faces, arêtes et sommets de X sont bien définis, et les faces sont des surfaces polygonales planes convexes. X est un CW-complexe fini dont les 0-cellules sont les sommets, les 1-cellules les arêtes et les 2-cellules les faces.

1.9.3 homologie d'un CW-complexe

Pour un CW-complexe fini de dimension n

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n = X$$

soit $C_p(X, \mathbb{Z})$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ le $\mathbb{Z}$-module libre ayant pour base l'ensemble des p-cellules. Il existe un opérateur bord $\partial_p : C_p(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_{p-1}(X, \mathbb{Z})$ $(p \geqslant 1)$ tel que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ $\forall p \geqslant 1$ (Pour $p = 0$, on pose $\partial_0 = 0$). On introduit alors les groupes d'homologies du CW-complexe par

$$H_p(C_*(X, \mathbb{Z})) = \mathrm{Ker}\ \partial_p / \mathrm{Im}\ \partial_{p+1}$$

On pose $H_p(C_*(X, \mathbb{Z})) = \{0\}$ pour $p > n$.

Théorème 11 *$H_p(C_*(X, \mathbb{Z}))$ est un $\mathbb{Z}$-module finiment engendré; il est isomorphe à $H_p(X)$.*

Lorsque X possède une structure de CW-complexe fini, le calcul de son homologie est donc ramené au calcul de l'homologie du complexe de base *finie* $C_*(X, \mathbb{Z})$.

1.9.4 caractéristique d'Euler-Poincaré d'un CW-complexe

Théorème 12 *La caractéristique d'Euler-Poincaré d'un espace compact X possèdant une structure de CW-complexe fini de dimension n est*

$$\chi(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p\ \alpha_p$$

où α_p est le nombre de p-cellules.

Démonstration.

On a $b_p(X) = \dim_{\mathbb{R}} H_p(X, \mathbb{R})$. Or d'après le Théorème des coefficients universels (qui est aussi vrai pour l'homologie des CW-complexes),

$$H_p(C_*(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) = H_p(C_*(X, \mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong H_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = H_p(X, \mathbb{R})$$

ou encore

$$H_p(C_*(X, \mathbb{R})) \cong H_p(X, \mathbb{R})$$

où $C_p(X,\mathbb{R})$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des p-cellules. Si Z_p et B_p désignent respectivement le noyau de $\partial_p : C_p(X,\mathbb{R}) \longrightarrow C_{p-1}(X,\mathbb{R})$ (pour $p = 0$, $Z_0 = C_0(X,\mathbb{R})$) et l'image de de $\partial_{p+1} : C_{p+1}(X,\mathbb{R}) \longrightarrow C_p(X,\mathbb{R})$, on a $b_p(X) = \dim Z_p - \dim B_p$ d'où par le théorème du rang $b_p(X) = \dim Z_p + \dim Z_{p+1} - \dim C_{p+1}(X,\mathbb{R})$. Alors

$$\chi(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p\, b_p(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim C_p(X,\mathbb{R}) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p\, \alpha_p$$

.

1.9.5 cas des polyèdres

Soit X la surface d'un polyèdre convexe de $\mathbb{R}^3$. X est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$, donc $\chi(X) = \chi(\mathbb{S}^2) = 2$. Si S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces de X, on a donc d'après le résultat précédent $S - A + F = 2$. C'est la relation d'Euler qui exprime donc que la caractéristique d'Euler-Poincaré de X est 2.

Pour les polyèdres non-convexes, la caractéristique d'Euler-Poincaré de X sera encore 2 si le polyèdre est *simple*, i.e. X est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$, et la relation d'Euler sera encore vraie si de plus les notion de faces, arêtes, sommets correspondent à une structure de CW-complexe sur X, ce qui n'est pas toujours le cas ([?]).

2 Cohomologie

2.1 groupes de cohomologie

Soit X un espace topologique et considérons le complexe de chaînes singulier de X

$$\{0\} \xleftarrow{\partial} S_0 \xleftarrow{\partial} S_1 \xleftarrow{\partial} S_2 \xleftarrow{\partial} \ldots \xleftarrow{\partial} S_p \xleftarrow{\partial} S_{p+1} \ldots$$

où $S_p = S_p(X)$ et l'on a omis les indices sur les ∂. Par dualité et transposition, on obtient pour tout $\mathbb{Z}$-module E un complexe de *cochaînes* singulier de X comme suit.

Soit E un $\mathbb{Z}$-module, $S^p = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_p, E)$ le $\mathbb{Z}$-module des $\mathbb{Z}$-homomorphismes de S_p dans E (i.e. homomorphismes de groupes), et $d_p = {}^t\partial_{p+1} : S^p \longrightarrow S^{p+1}$ (On omet souvent aussi l'indice sur le d). Si $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le *crochet de dualité E-valué* entre S_p et S^p

$$\langle z, f\rangle = f(z) \quad \forall z \in S_p, \quad \forall f \in S^p,$$

on a donc par définition

$$\langle z, df\rangle = \langle \partial z, f\rangle \quad \forall z \in S_{p+1}, \quad \forall f \in S^p.$$

La suite
$$S^0 \xrightarrow{d} S^1 \xrightarrow{d} S^2 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} S^p \xrightarrow{d} S^{p+1} \xrightarrow{d} \dots$$

est le *complexe de cochaînes* singulier de X à coefficients dans E. On pose $Z^p(X,E) = \text{Ker } d_p \; p \geq 0$ et $B^p(X,E) = \text{Im } d_{p-1} \; p \geq 1, B^0(X,E) = \{0\}$. Les éléments de $Z^p(X,E)$ sont appelés *p-cocycles* et ceux de $B^p(X,E)$ *p-cobords.* Le $\mathbb{Z}$-module quotient

$$H^p(X,E) = Z^p(X,E) \, / \, B^p(X,E)$$

est le *p-ième groupe de cohomologie singulière de X à coefficients dans E.* Si f et g sont deux p-cocycles cohomologues, on notera $f \equiv g$; la classe de cohomologie de f est notée $[f]$.

2.2

Lemme 5 *Pour tout $p \geq 0$, on a*
(i) $Z^p(X,E) = (B_p(X))^\perp$
(ii) $B^p(X,E) = (Z_p(X))^\perp$.

Démonstration.

(i) Pour $p \geqslant 0$ et $f \in S^p$, on a: $f \in Z^p(X,E) \Leftrightarrow df = 0 \Leftrightarrow \langle z, df \rangle = 0 \quad \forall z \in S_{p+1} \Leftrightarrow \langle \partial z, f \rangle = 0 \quad \forall z \in S_{p+1} \Leftrightarrow f \in (B_p(X))^\perp$.

(ii) Pour $p = 0$, $B^0(X,E) = \{0\}$ et $Z_0(X) = S_0$, donc $B^0(X,E) = (Z_0(X))^\perp$. Supposons $p \geqslant 1$. On a $B^p(X,E) \subset (Z_p(X))^\perp$ puisque $f \in B^p(X,E) \Rightarrow \exists g \in S^{p-1} \quad f = dg \Rightarrow \langle z, f \rangle = \langle z, dg \rangle = \langle \underbrace{\partial z}_{=0}, g \rangle = 0 \quad \forall z \in Z_p(X) \Rightarrow f \in (Z_p(X))^\perp$.

Réciproquement, $(Z_p(X))^\perp \subset B^p(X,E)$. En effet, soit $f \in (Z_p(X))^\perp$. On définit $g \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(B_{p-1}(X), E)$ par

$$\langle \partial z, g \rangle = \langle z, f \rangle \quad \forall z \in S_p(X)$$

($\langle z, f \rangle$ ne dépend que de ∂z et non du z utilisé puisque $f \in (Z_p(X))^\perp$). Comme S_{p-1} est un $\mathbb{Z}$-module libre, g se prolonge à S_{p-1} et alors $f = dg$.

2.3

Le lemme précédent implique que le dualité entre S_p et S^p passe aux quotients et définit une forme bilinéaire sur $H_p(X) \times H^p(X,E)$ à valeurs dans E:
$$\langle [z], [f] \rangle = \langle z, f \rangle \quad \forall z \in Z_p(X) \quad \forall f \in Z^p(X,E).$$

D'où un homomorphisme (application $\mathbb{Z}$-linéaire)

$$\alpha : H^p(X,E) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(X), E)$$

défini par
$$[f] \longmapsto \alpha([f]) = \langle \, \cdot \, , [f] \rangle.$$

L'homomorphisme α n'est pas toujours un isomorphisme: il est toujours surjectif, mais pas toujours injectif. Pour qu'il le soit, il suffit que E soit un $\mathbb{Z}$-module *divisible*, i.e. $\forall y \in E \; \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \exists x \in E \quad y = nx$.

En fait, on a un Théorème des coefficients universel pour la cohomologie:

Théorème 13 *Pour tout $\mathbb{Z}$-module E, on a:*

$$H^p(X, E) = Hom_{\mathbb{Z}}(H_p(X), E) \; \oplus \; Ext \; (H_{p-1}(X), E)$$

où $Ext \; (H_{p-1}(X), E)$ est un $\mathbb{Z}$-module qui est nul si E est divisible ou si $H_{p-1}(X)$ est libre.

Les tableaux suivants sont des exemples pour comparer $\mathrm{Ext}(A, B)$ et $\mathrm{Tor}(A, B)$ dans le cas où A, B sont $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_m$.

Ext	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_n$
$\mathbb{Z}$	0	0
$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z}_m$	$\mathbb{Z}_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$

Tor	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_n$
$\mathbb{Z}$	0	0
$\mathbb{Z}_m$	0	$\mathbb{Z}_{\mathrm{pgcd}(m,n)}$

2.4 Exemples

2.4.1

Si $H_p(X)$ et $H_{p-1}(X)$ sont finiment engendrés,

$$H_p(X) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \; \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_\ell}$$

$$H_{p-1}(X) \cong \mathbb{Z}^s \oplus \; \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}.$$

Comme $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = \{0\}$ et que $\mathrm{Ext}(A \oplus C, B) = \mathrm{Ext}(A, B) \oplus \mathrm{Ext}(C, B)$, on a:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}} (H_p(X), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$$

$$\mathrm{Ext} \; (H_{p-1}(X), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}.$$

D'où :

$$H^p(X, \mathbb{Z}) \cong \underbrace{\mathbb{Z}^r}_{\text{partie libre de } H_p(X)} \oplus \underbrace{\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}}_{\text{partie de torsion de } H_{p-1}(X)}$$

Donc $H^p(X, \mathbb{Z})$ et $H_p(X)$ ont le même rang r.

2.4.2

Si $\Bbbk$ est un corps commutatif, l'application

$$\alpha : H^p(X, \Bbbk) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(X), \Bbbk)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules. Mais le $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(X), \Bbbk)$ est canoniquement isomorphe au $\mathbb{Z}$-module $\mathrm{Hom}_{\Bbbk} (H_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk, \Bbbk)$ i.e. au *dual du $\Bbbk$-espace vectoriel $H_p(X, \Bbbk)$*. Ainsi $H^p(X, \Bbbk)$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel isomorphe au dual du $\Bbbk$-espace vectoriel $H_p(X, \Bbbk)$.

2.4.3

Pour $X = \mathbb{S}^n$, on a $H_p(\mathbb{S}^n) = \{0\}$ si $p \neq 0, n$ et $H_0(\mathbb{S}^n) \cong H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$. Donc

$$H^p(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(H_p(\mathbb{S}^n), \mathbb{Z}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \\ \{0\} & \text{si } 0 < p < n \text{ ou } p > n \end{cases}$$

i.e. la cohomologie est égale à l'homologie.

2.4.4

Pour $X = \mathbb{R}P^2$, espace projectif réel de dimension 2, on a:

$$H_0(X) = \mathbb{Z}, \quad H_1(X) \cong \mathbb{Z}_2, \quad H_p(X) = \{0\} \quad \forall p \geq 2.$$

Donc

$$H^0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H^1(X, \mathbb{Z}) = \{0\}, \quad H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \ncong H_2(X).$$

Ce genre de difficulté disparaît avec les coefficients dans un corps, par ex. $\mathbb{R}$.

3 Cohomologie de De Rahm de variétés différentiables

Soit M une variété différentiable réelle de classe C^∞, de dimension finie n. Le corps de base est $\mathbb{R}$.

3.1 champs de vecteurs

On appelle vecteur tangent au point $x_0 = \gamma(t_0)$ à la courbe (différentiable) $t \longmapsto \gamma(t)$ de M l'opérateur X_{x_0} sur l'algèbre $\mathcal{F}_{x_0}$ des fonctions définies au voisinage de x_0 et de classe C^∞ défini par

$$X_{x_0}(f) = \left[\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\right]_{t=t_0} \qquad \forall f \in \mathcal{F}_{x_0}.$$

On note $X_{x_0} = \dot{\gamma}(t_0)$. Cet opérateur est une *dérivation* de l'algèbre $\mathcal{F}_{x_0}$, i.e. il est linéaire et $X_{x_0}(fg) = X_{x_0}(f)g(x_0) + f(x_0)X_{x_0}(g) \qquad \forall f, g \in \mathcal{F}_{x_0}$. Réciproquement, une dérivation est de la forme $\dot{\gamma}(t_0)$ pour une courbe γ.

L'ensemble des vecteurs tangents au point x_0 est donc l'espace vectoriel des dérivations de l'algèbre $\mathcal{F}_{x_0}$; on le note $T_{x_0}(M)$.

Dans une carte locale $(u^1, \ldots, u^n)$ de M, on a

$$X_{x_0}(f) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial u^j}\right)_{x_0} \left(\frac{d(u^j \circ \gamma)}{dt}\right)_{t_0}$$

Les opérateurs $\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_{x_0}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ forment une base de $T_{x_0}(M)$ appelée *base canonique.*

On appelle champ de vecteurs sur M une application $X : x \longmapsto X_x \in T_x(M)$. Dans le domaine d'une carte de M, on a $X_x = \sum_{j=1}^n \xi^j(x) \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_x$. On dit que le champ de vecteurs est de classe C^∞ sur M si les fonctions ξ^j sont de classe C^∞ pour toute carte de M.

L'ensemble des champs de vecteurs C^∞ est l'ensemble des *dérivations de l'algèbre* $C^\infty(M)$ des fonctions de classe C^∞ sur M: si l'on note $X(f)$ la fonction $x \longmapsto X_x(f)$, on a:

$$X(fg) = X(f)g + fX(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Le *crochet* de deux champs de vecteurs X, Y est le champ de vecteurs défini par

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

On vérifie facilement que cette formule définit bien une dérivation de $C^\infty(M)$.

On notera $\mathfrak{D}^1(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M. L'application $(X, Y) \longmapsto [X, Y]$ munit $\mathfrak{D}^1(M)$ d'une structure d'*algèbre de Lie*: elle est bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'*identité de Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \qquad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{D}^1(M).$$

3.2 champs de p-formes

On appelle champ de 1-formes sur M une application

$$\omega : x \longmapsto \omega_x \in T_x^*(M) \text{ (dual de l'espace vectoriel } T_x(M)).$$

Dans le domaine d'une carte de M, on a $\omega_x = \sum_{j=1}^n \eta_j(x)\ \omega_x^j$, où les $\omega_x^j = (du^j)_x$ sont les éléments de la base de $T_x^*(M)$ duale des $\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_x$, i.e. $\langle \frac{\partial}{\partial u^j}, du^\ell \rangle = \delta_{j,\ell}$ (symbole de Kronecker) en omettant les indices x et en désignant par $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité entre $T_x(M)$ et $T_x^*(M)$. On dit que le champ de 1-formes est de classe C^∞ sur M si les fonctions η_j sont de classe C^∞ pour toute carte de M.

On appelle champ de p-formes sur M une application

$$\omega : x \longmapsto \omega_x \in \bigwedge^p T_x^*(M)$$

où $\bigwedge^p T_x^*(M)$ est l'espace vectoriel des formes multilinéaires alternées sur $\underbrace{T_x(M) \times \ldots \times T_x(M)}_{p \text{ fois}}$.

Dans le domaine d'une carte de M, on a

$$\omega_x = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \eta_{i_1, \ldots, i_p}(x) \quad \omega_x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_x^{i_p}$$

où les $\omega_x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_x^{i_p}$ sont les produits extérieurs des 1-formes de base (voir section suivante). On dit que le champ de p-formes est de classe C^∞ sur M si les fonctions $\eta_{i_1,\ldots,i_p}$ sont de classe C^∞ pour toute carte de M.

On notera $\mathfrak{D}_p(M)$ l'espace vectoriel des champs de p-formes de classe C^∞ sur M.

3.3 produit extérieur

Le corps de base est ici $\mathbb{R}$, mais les résultats sont les mêmes pour tout corps commutatif de caractéristique $\neq 2$ (pour la notion de forme alternée).

3.3.1

Théorème 14 *Soit E un espace vectoriel. Pour tout $p \geqslant 2$ il existe un espace vectoriel unique à isomorphisme près noté $\bigwedge^p E$ tel que:*

1. Il existe une application p-linéaire alternée $\pi : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{p\ fois} \longrightarrow \bigwedge^p E$ dont l'image engendre $\bigwedge^p E$.

2. Pour tout espace vectoriel F et toute application p-linéaire alternée f : $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{p\ fois} \longrightarrow F$, il existe une unique application linéaire $g : \bigwedge^p E \longrightarrow F$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underbrace{E \times \ldots \times E}_{p\ fois} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & F \\
\bigwedge^p E & g
\end{tikzcd}$$

On note pour $x_1, \ldots, x_p \in E$: $\pi(x_1, \ldots, x_p) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$.

Pour $p = 0$, on pose $\bigwedge^0 E = \mathbb{R}$, et pour $p = 1$, $\bigwedge^1 E = E$.

3.3.2 propriétés essentielles du produit extérieur

(i) si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de E, $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p})_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n}$ est une base de $\bigwedge^p E$. Donc dim $\bigwedge^p E = C_n^p$ (coefficient binômial) pour $0 \leqslant p \leqslant n$ et $\bigwedge^p E = \{0\}$ si $p > n$.

(ii) Il existe une application bilinéaire $h : (\bigwedge^p E) \times (\bigwedge^q E) \longrightarrow \bigwedge^{p+q} E$ unique telle que pour tous $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q \in E$

$$h(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p, y_1 \wedge \ldots \wedge y_q) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_q.$$

On note $h(z, w) = z \wedge w$ pour $z \in \bigwedge^p E$, $w \in \bigwedge^q E$.

On a:

$$z \wedge w = (-1)^{pq}\, w \wedge z \qquad \forall z \in \bigwedge^p E \quad \forall w \in \bigwedge^q E.$$

(iii) La dualité entre E et son dual E^* induit une dualité entre $\bigwedge^p E$ et $\bigwedge^p E^*$ telle que pour tous $x_1, \ldots, x_p \in E$, $\omega^1, \ldots, \omega^p \in E^*$

$$\langle x_1 \wedge \ldots \wedge x_p, \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^p \rangle = \det\ (\langle x_i, \omega^j \rangle).$$

Nous identifierons par cette dualité $\bigwedge^p E^*$ à $(\bigwedge^p E)^*$, ce dernier étant identifié à l'espace vectoriel des formes p-linéaires alternées sur E.

3.4 différentielle

Soit $\Phi : M \longrightarrow M$ un C^∞-difféomorphisme de M. Sa différentielle Φ_{*_x} au point $x \in M$ est l'endomorphisme de $T_x(M)$ qui associe à tout $X_x \in T_x(M)$ le vecteur tangent $\Phi_{*_x}(X_x) \in T_{\Phi(x)}(M)$ défini par:

$$\Phi_{*_x}(X_x)(f) = X_x(f \circ \Phi) \qquad \forall f \in \mathcal{F}_{\Phi(x)}.$$

On définit $\Phi_*(X) \in \mathfrak{D}^1(M)$ pour $X \in \mathfrak{D}^1(M)$ par $(\Phi_*(X))_{\Phi(x)} = \Phi_{*_x}(X_x)\ \forall x \in M$. On a

$$\Phi_*(X)(f) \circ \Phi = X(f \circ \Phi) \qquad \forall f \in C^\infty(M).$$

Noter que $[\Phi_*(X), \Phi_*(Y)] = \Phi_*([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}^1(M)$ car pour tout $f \in C^\infty(M)$, $\Phi_*(X)\left(\Phi_*(Y)(f)\right) \circ \Phi = X\left(\Phi_*(Y)(f) \circ \Phi\right) = X\left(Y(f \circ \Phi)\right)$.

On définit de même $\Phi_x^* = {}^t\Phi_{*_x} : T_{\Phi(x)}^*(M) \longrightarrow T_x^*(M)$ par

$$\left\langle X_x, \Phi_x^*\left(\omega_{\Phi(x)}\right)\right\rangle = \left\langle \Phi_{*_x}\left(X_x\right), \omega_{\Phi(x)}\right\rangle \qquad \forall X_x \in T_x(M),\ \forall \omega_{\Phi(x)} \in T_{\Phi(x)}^*(M).$$

Cela permet de définir $\Phi^*(\omega) \in \mathfrak{D}_1(M)$ pour $\omega \in \mathfrak{D}_1(M)$ par $\left(\Phi^*(\omega)\right)_x = \Phi_x^*\left(\omega_{\Phi(x)}\right)$ et l'on a:

$$\langle X, \Phi^*(\omega)\rangle = \langle \Phi_*(X), \omega\rangle \circ \Phi \qquad \forall X \in \mathfrak{D}^1(M),\ \forall \omega \in \mathfrak{D}_1(M).$$

Si $\omega_{\Phi(x)} \in \bigwedge^p T_{\Phi(x)}^*(M)$, on définit $\Phi_x^*(\omega_{\Phi(x)}) \in \bigwedge^p T_x^*(M)$ par

$$\Phi_x^*\left(\omega_{\Phi(x)}\right)\left((X_1)_x, \ldots, (X_p)_x\right) = \left(\omega_{\Phi(x)}\right)\left(\Phi_{*_x}\left((X_1)_x\right), \ldots, \Phi_{*_x}\left((X_p)_x\right)\right)$$

pour tous $(X_1)_x, \ldots, (X_p)_x \in T_x(M)$. Cela permet encore de définir $\Phi^*(\omega)$ pour $\omega \in \mathfrak{D}_p(M)$ et l'on a:

$$\Phi^*(\omega)\left(X_1, \ldots, X_p\right) = \left(\omega\left(\Phi_*(X_1), \ldots, \Phi_*(X_p)\right)\right) \circ \Phi$$

pour tous $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{D}^1(M) \quad \forall \omega \in \mathfrak{D}_p(M)$.

Si $\Psi : M \longrightarrow N$ est une application de classe C^∞ de M dans une variété N, la différentielle $\Psi_{*_x} : T_x(M) \longrightarrow T_{\Psi(x)}(N)$ est définie de façon analogue. Cela permet encore de définir $\Psi^*(\omega) \in \mathfrak{D}_p(M)$ pour $\omega \in \mathfrak{D}_p(N)$. Noter cependant que si Ψ n'est pas un C^∞-difféomorphisme, le champ de vecteurs $\Psi_*(X)$ n'est pas défini.

3.5 cohomologie de De Rahm

3.5.1

Soit $\mathfrak{D}(M) = \bigoplus_{p=0}^{n} \mathfrak{D}_p(M)$, où $\mathfrak{D}_0(M) = C^\infty(M)$. Le produit extérieur d'une p-forme et d'une q-forme est défini point par point: $(\omega \wedge \pi)_x = \omega_x \wedge \pi_x$.

$\mathfrak{D}(M)$ muni du produit extérieur est une algèbre graduée anticommutative.

3.5.2

Il existe une unique *antidérivation* d appelée *différentielle extérieure* de $\mathfrak{D}(M)$ qui prolonge la différentielle des fonctions sur $\mathfrak{D}_0(M)$, i.e.

$$d(\omega \wedge \pi) = (d\omega) \wedge \pi + (-1)^p \omega \wedge d\pi \quad \forall \omega \in \mathfrak{D}_p(M),\ \forall \pi \in \mathfrak{D}(M).$$

On a $d^2 = 0$, d'où un complexe de cochaînes:

$$\mathfrak{D}_0(M) \xrightarrow{d} \mathfrak{D}_1(M) \xrightarrow{d} \mathfrak{D}_2(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathfrak{D}_p(M) \xrightarrow{d} \mathfrak{D}_{p+1}(M) \xrightarrow{d} \dots$$
$$\dots \xrightarrow{d} \mathfrak{D}_n(M) \xrightarrow{d} \{0\}.$$

C'est le *complexe de De Rahm*. On en déduit la *cohomologie de De Rahm*: si d_p est la restriction de d à $\mathfrak{D}_p(M)$, on pose $Z^p_{DR}(M) = \operatorname{Ker} d_p$ $p \geq 0$ et $B^p_{DR}(M) = \operatorname{Im} d_{p-1}$ $p \geq 1, B^0_{DR}(M) = \{0\}$. Les éléments de $Z^p_{DR}(M)$ sont appelés *p-cocycles* et ceux de $B^p_{DR}(M)$ *p-cobords*. L'espace vectoriel quotient

$$H^p_{DR}(M) = Z^p_{DR}(M) \,/\, B^p_{DR}(M)$$

est le *p-ième groupe de cohomologie de De Rahm*. $H^p_{DR}(M) = \{0\}$ pour $p > n$.

3.5.3

Pour $\omega \in \mathfrak{D}_p(M)$, $\quad X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{D}^1(M)$,

$$d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i \Big(\omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{p+1})\Big)$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p+1} (-1)^{i+j} \omega \Big([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{p+1}\Big).$$

4 Cohomologie de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

4.1 champs invariants à gauche

Soit G un *groupe de Lie*, i.e. un groupe muni d'une structure de variété de classe C^∞, réelle de dimension finie, telle que la multiplication de G et le passage à l'inverse dans G soient des applications de classe C^∞.

Pour $a \in G$, on note L_a et R_a les *translations* à gauche et à droite par a dans G: $L_a(x) = ax, R_a(x) = xa \quad \forall x \in G$. Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{D}^1(G)$ est dit *invariant à gauche* si $(L_a)_*(X) = X \quad \forall a \in G$. Cela s'écrit $(L_a)_{*_x}(X_x) = X_{ax} \quad \forall a, x \in G$, ou encore $(L_a)_{*_e}(X_e) = X_a \quad \forall a \in G$, en notant e l'élément neutre de G. Une p-forme $\omega \in \mathfrak{D}^p(G)$ est dite *invariante à gauche* si $(L_a)^*(\omega) = \omega \quad \forall a \in G$. Cela s'écrit $(L_a)^*_x(\omega_{ax}) = \omega_x \quad \forall a, x \in G$, ou encore $(L_{a^{-1}})^*_a(\omega_e) = \omega_a \quad \forall a \in G$. Les p-formes invariantes à gauche sur G forment un sous-espace vectoriel $\mathfrak{D}^{\mathrm{L}}_p(G)$ de $\mathfrak{D}_p(G)$.

Les champs de vecteurs invariants à gauche forment une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{D}^1_{\mathrm{L}}(G)$ de $\mathfrak{D}^1(G)$. On a en effet pour tous $X, Y \in \mathfrak{D}^1_{\mathrm{L}}(G), \quad a \in G$:

$$(L_a)_*([X,Y]) = [(L_a)_*(X), (L_a)_*(Y)] = [X,Y]$$

4.2 algèbre de Lie

Soit $\mathfrak{g} = T_e(G)$. Pour alléger les notations, dorénavant un élément de $\mathfrak{g}$ sera noté X au lieu de X_e. Pour $X \in \mathfrak{g}$, il existe un unique champ de vecteur invariant à gauche $\tilde{X}$ telle que $(\tilde{X})_e = X$: il est défini par $\tilde{X}_x = (L_x)_{*_e}(X)$.

On pose pour $X, Y \in \mathfrak{g}$: $[X,Y] = \left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right]_e$, de sorte que

$$\left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right] = \widetilde{[X,Y]} \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Le crochet [,] munit $\mathfrak{g}$ d'une structure d'algèbre de Lie, isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{D}^1_{\mathrm{L}}(G)$ par l'application $X \longmapsto \tilde{X}$. On dit que $\mathfrak{g}$ est *l'algèbre de Lie du groupe de Lie G*.

4.3 application exponentielle

4.3.1

On appelle *sous-groupe à un paramètre* du groupe de Lie G un homomorphisme continu de $\mathbb{R}$ dans G, i.e. une application continue $t \mapsto a(t)$ telle que $a(t+s) = a(t)a(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$. Un tel homomorphisme est nécessairement de classe C^∞ (Théorème de Cartan). Un point fondamental est le suivant: pour tout X dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, il existe un sous-groupe à un paramètre unique a_X tel que $\dot{a}_X(0) = X$. X est appelé le *générateur* du sous-groupe à un paramètre a_X.

4.3.2

L'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G est définie par $\exp X = a_X(1)$. On a alors $a_X(t) = \exp tX \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathfrak{g}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $s \mapsto b(s) = a_X(ts)$ est un sous-groupe à un paramètre, dont le générateur est $\dot{b}(0) = t\dot{a}(0) = tX$, donc $b(s) = a_{tX}(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$, et en prenant $s = 1$, $b(1) = a_X(t) = a_{tX}(1) = \exp tX \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

4.3.3

Si G est le groupe $GL(n,\mathbb{R})$ des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients réels, l'algèbre de Lie de G est l'algèbre $\mathfrak{g} = gl(n,\mathbb{R})$ des matrices $n \times n$ à coefficients réels avec le crochet $[A,B] = AB - BA$. L'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G est l'exponentielle habituelle d'une matrice: $\exp X = e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$. En effet, si $X \in gl(n,\mathbb{R})$, $\frac{a_X(t+s)-a_X(t)}{s} = \frac{a_X(s)-Id}{s} a_X(t)$ donc la fonction matricielle a_X est une solution de l'équation différentielle $\frac{d}{dt}Y = XY$ telle que $a_X(0) = Id$. Mais on sait que l'application $t \mapsto e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!}$ est une solution de cette équation différentielle vérifiant la même condition initiale. Donc $a_{tX} = e^{tX} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

4.4 une formule fondamentale

Pour tout $\omega \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^*$, il existe une unique p-forme $\tilde{\omega}$ invariante à gauche sur G telle $\tilde{\omega}_e = \omega$. Noter que pour tous $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{g}$, $\tilde{\omega}(\widetilde{X_1}, \ldots, \widetilde{X_p})$ est la fonction constante sur G égale à $\omega(X_1, \ldots, X_p)$.

Lemme 6 *On a* $d\tilde{\omega} = \widetilde{d\omega}$*, où* $d : \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \longrightarrow \bigwedge^{p+1} \mathfrak{g}^*$ *est défini par*

$$d\omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p+1} (-1)^{i+j}\, \omega\left([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{p+1}\right)$$

pour $X_1, \ldots, X_{p+1} \in \mathfrak{g}$.

Démonstration.

Il suffit de vérifier la formule sur des champs de vecteurs invariants à gauche. Pour tous $X_1, \ldots, X_{p+1} \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}(\widetilde{X_1}, \ldots, \widetilde{X_{p+1}}) = & \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1}\, \widetilde{X_i}\left(\tilde{\omega}(\widetilde{X_1}, \ldots, \widehat{\widetilde{X_i}}, \ldots, \widetilde{X_{p+1}})\right) \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p+1} (-1)^{i+j}\, \tilde{\omega}\left([\widetilde{X_i}, \widetilde{X_j}], \widetilde{X_1}, \ldots, \widehat{\widetilde{X_i}}, \ldots, \widehat{\widetilde{X_j}}, \ldots, \widetilde{X_{p+1}}\right). \end{aligned}$$

Mais

$$\widetilde{X_i}\left(\tilde{\omega}(\widetilde{X_1}, \ldots, \widehat{\widetilde{X_i}}, \ldots, \widetilde{X_{p+1}})\right) = 0$$

puisque $\tilde{\omega}(\widetilde{X_1}, \ldots, \widehat{\widetilde{X_i}}, \ldots, \widetilde{X_{p+1}})$ est une fonction constante sur G, et d'autre part

$$\begin{aligned} & \tilde{\omega}\left([\widetilde{X_i}, \widetilde{X_j}], \widetilde{X_1}, \ldots, \widehat{\widetilde{X_i}}, \ldots, \widehat{\widetilde{X_j}}, \ldots, \widetilde{X_{p+1}}\right) = \\ & \qquad \omega\left([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{p+1}\right). \end{aligned}$$

4.5 cohomologie de l'algèbre de Lie

Si d_p est la restriction de d à $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ avec $d_0 = 0$, on a $d_p \circ d_{p-1} = 0 \ \forall p \geqslant 1$, d'où un complexe de cochaînes:

$$C^0(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \overset{0}{\bigwedge} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d_0=0} C^1(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \mathfrak{g}^* = \overset{1}{\bigwedge} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d_1} C^2(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \overset{2}{\bigwedge} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d_2} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{d_{p-1}} C^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \overset{p}{\bigwedge} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d_p} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} C^n(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \overset{n}{\bigwedge} \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R} \xrightarrow{d_n=0} \{0\}$$

où $n = \dim \mathfrak{g}$.

On en déduit la *cohomologie d'algèbre de Lie* de $\mathfrak{g}$: on pose $Z^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} d_p \ p \geq 0$ et $B^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \operatorname{Im} d_{p-1} \ p \geq 1, B^0(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \{0\}$. Les éléments de $Z^p(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ sont appelés *p-cocycles* et ceux de $B^p(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ *p-cobords.* L'espace vectoriel quotient

$$H^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = Z^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}) / B^p(\mathfrak{g},\mathbb{R})$$

est le *p-ième groupe de cohomologie à coefficients réels de* $\mathfrak{g}$. $H^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \{0\}$ pour $p > n$. On notera aussi $H^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = H^p_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}), Z^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = Z^p_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}), B^p(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = B^p_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$.

4.6 exemple

$H^1_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = Z^1_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{\omega \in \mathfrak{g}^* \ ; \ \omega([X,Y]) = 0 \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}$ est le sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ des formes linéaires qui s'annulent sur $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (sous-espace vectoriel engendré par les $[X,Y]$, $X, Y \in \mathfrak{g}$) , donc est isomorphe à $(\mathfrak{g} / [\mathfrak{g},\mathfrak{g}])^*$.

5 Théorème de De Rahm

5.1 cohomologie C^∞

5.1.1

Pour M variété C^∞, on a défini l'homologie et la cohomologie singulières.

On peut aussi définir l'homologie et la cohomologie singulières *de classe* C^∞ en utilisant des p-simplexes singuliers σ de classe C^∞, i.e. $\sigma : \Delta_p \longrightarrow M$ est la restriction à Δ_p d'une application $\sigma' : U \longrightarrow M$ de classe C^∞ dans un voisinage ouvert U de Δ_p.

L'homologie (resp. la cohomologie) singulière de classe C^∞ est isomorphe à l'homologie (resp. la cohomologie) singulière: pour tout $\mathbb{Z}$-module E,

$$H_p(M,E) \cong H_p^{C^\infty}(M,E)$$

$$H^p(M,E) \cong H^p_{C^\infty}(M,E)$$

5.1.2

Si $\sigma : \Delta_p \longrightarrow M$ est un p-simplexe singulier de classe C^∞ et si $\omega \in \mathfrak{D}_p(M)$, on a $(\sigma')^* (\omega) \in \mathfrak{D}_p(U)$ avec U comme ci-dessus. L'intégrale $\int_{\Delta_p} (\sigma')^*(\omega)$ est bien définie et ne dépend pas du prolongement σ' utilisé. On la note $\int_\sigma \omega$. Si $z \in S_p^{C^\infty}(M, \mathbb{R})$ est une p-chaîne de classe C^∞, on définit $\int_z \omega$ par linéarité.

5.2 Théorème de De Rahm

Théorème 15 *Si M est à base dénombrable d'ouverts (e.g. M connexe),*

$$H^p_{DR}(M) \cong H^p_{C^\infty}(M, \mathbb{R}) \cong H^p(M, \mathbb{R}).$$

On peut expliciter ici l'isomorphisme de De Rahm

$$\Psi : H^p_{DR}(M) \longrightarrow H^p(M, \mathbb{R}).$$

Posons pour $\omega \in \mathfrak{D}_p(M), z \in S_p^{C^\infty}(M, \mathbb{R})$: $\quad \langle\langle z, \omega \rangle\rangle = \int_z \omega$.
D'après la formule de Stokes, on a:

$$\langle\langle \partial\zeta, \omega \rangle\rangle = \int_{\partial\zeta} \omega = \int_\zeta d\omega \qquad \forall \omega \in \mathfrak{D}_p(M), \quad \forall \zeta \in S_{p+1}^{C^\infty}(M, \mathbb{R})$$

donc

$$Z^p_{DR}(M) \subset \left(B_p^{C^\infty}(M, \mathbb{R})\right)^\perp$$

$$Z_p^{C^\infty}(M, \mathbb{R}) \subset \left(B^p_{DR}(M)\right)^\perp.$$

Ainsi, la forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ sur $Z_p^{C^\infty}(M, \mathbb{R}) \times Z^p_{DR}(M)$ passe aux quotients et définit une forme bilinéaire sur $H^p_{C^\infty}(M, \mathbb{R}) \times H^p_{DR}(M)$ par

$$\langle\langle [z], [\omega] \rangle\rangle = \langle\langle z, \omega \rangle\rangle.$$

D'où une application

$$\Psi : H^p_{DR}(M) \longrightarrow \left(H_p^{C^\infty}(M, \mathbb{R})\right)^* \cong \left(H_p(M, \mathbb{R})\right)^*.$$

Mais on a vu que $H^p(M, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel isomorphe au dual du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $H_p(M, \mathbb{R})$. Si l'on identifie $(H_p(M, \mathbb{R}))^*$ à $H^p(M, \mathbb{R})$, Ψ est l'isomorphisme de De Rahm.

6 Dualité de Poincaré et application au cas compact

6.1 dualité de Poincaré

6.1.1 orientabilité

Soit M un variété de dimension n, $\phi = (u^1, \ldots, u^n), \psi = (v^1, \ldots, v^n)$ des cartes de M de domaines respectifs U, V, et f une fonction de classe C^∞ sur M à support compact K inclus dans $U \cap V$.

Si $J = \frac{D(u^1,\ldots,u^n)}{D(v^1,\ldots,v^n)}$ est le jacobien, on a en identifiant un point x de $U \cap V$ à son image par ϕ ou ψ:

$$f\, du^1 \wedge \ldots \wedge du^n = f\, J\, dv^1 \wedge \ldots \wedge dv^n.$$

D'autre part, la formule de changement de variable dans les intégrales s'écrit

$$\int_{\phi(K)} f(\phi^{-1}(u^1,\ldots,u^n))\, du^1 \ldots du^n = \int_{\psi(K)} f(\psi^{-1}(v^1,\ldots,v^n))\, |J|\, dv^1 \ldots dv^n.$$

Cette formule fait intervenir la *valeur absolue* du jacobien. Donc pour que l'on puisse définir l'intégrale de la n-forme $\omega = f\, du^1 \wedge \ldots \wedge du^n$ par la formule

$$\int_M \omega = \int_{\phi(K)} f(\phi^{-1}(u^1,\ldots,u^n))\, du^1 \ldots du^n$$

il suffit que le jacobien soit *positif* pour tout changement de carte, i.e. l'atlas de la variété M est tel que le jacobien soit positif pour tout changement de carte. Lorsqu'il existe un tel atlas de M, on dit que M est *orientable.*

Nous noterons $(\mathfrak{D}_p(M))_c$ l'espace de p-formes *à support compact* sur M.

Si on suppose M orientable, on peut donc définir l'intégrale $\int_M \omega$ pour toute $\omega \in (\mathfrak{D}_n(M))_c$ en utilisant une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement fini du support de ω par des domaines de cartes.

Il est facile de voir que $\int_M d\pi = 0 \quad \forall \pi \in (\mathfrak{D}_{n-1}(M))_c$.

6.1.2 cohomologie de De Rham à support compact

On a un *complexe de cochaînes à supports compacts*:

$$(\mathfrak{D}_0(M))_c \xrightarrow{d} (\mathfrak{D}_1(M))_c \xrightarrow{d} (\mathfrak{D}_2(M))_c \xrightarrow{d} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{d} (\mathfrak{D}_p(M))_c \xrightarrow{d} (\mathfrak{D}_{p+1}(M))_c \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} (\mathfrak{D}_n(M))_c \xrightarrow{d} \{0\},$$

d'où l'on déduit la *cohomologie de De Rahm à support compact* $H^p_{DR,c}(M)$.

6.1.3 dualité de Poincaré

On suppose M orientable de dimension n, à base dénombrable d'ouverts. Pour $\omega \in \mathfrak{D}_p(M)$, $\pi \in (\mathfrak{D}_{n-p}(M))_c$, soit

$$\langle \omega, \pi \rangle = \int_M \omega \wedge \pi.$$

$\langle\ ,\ \rangle$ est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $\mathfrak{D}_p(M) \times (\mathfrak{D}_{n-p}(M))_c \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pour $\alpha \in \mathfrak{D}_{p-1}(M)$, $\beta \in (\mathfrak{D}_{n-p}(M))_c$, on a $d\alpha \wedge \beta + (-1)^{p-1}\alpha \wedge d\beta = d(\alpha \wedge \beta)$ et comme $\int_M d(\alpha \wedge \beta) = 0$, il vient $\beta \in Z^{n-p}_{DR,c}(M) \Longrightarrow \langle d\alpha, \beta \rangle = 0$ donc $B^p_{DR}(M) \subset \left(Z^{n-p}_{DR,c}(M)\right)^{\perp}$.

De même, pour $\alpha \in \mathfrak{D}_p(M)$, $\beta \in (\mathfrak{D}_{n-p-1}(M))_c$, on a $d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta = d(\alpha \wedge \beta)$ et comme $\int_M d(\alpha \wedge \beta) = 0$, il vient $\alpha \in Z^p_{DR}(M) \Longrightarrow \langle \alpha, d\beta \rangle = 0$ donc $B^{n-p}_{DR,c}(M) \subset (Z^p_{DR}(M))^{\perp}$.

Ainsi $\langle\ ,\ \rangle$ passe aux quotients et définit une forme bilinéaire $H^p_{DR}(M) \times H^{n-p}_{DR,c}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$\langle [\omega], [\pi] \rangle = \langle \omega, \pi \rangle \quad \forall \omega \in Z^p_{DR}(M), \forall \pi \in Z^{n-p}_{DR,c}(M).$$

D'où une application $\Theta : H^p_{DR}(M) \longrightarrow \left(H^{n-p}_{DR,c}(M)\right)^*$.

Théorème 16 *L'application* Θ *est un isomorphisme.*

6.2 application au cas M compact

6.2.1

Théorème 17 *Soit* M *une variété compacte. Alors* $\dim H^p_{DR}(M) < +\infty\ \forall p$.

Démonstration.

Si M est la réunion de deux ouverts U et V, la suite exacte de Mayer-Viétoris de l'homologie singulière à coefficients réels donne par transposition la suite exacte

$$\ldots \longrightarrow H^{p-1}_{DR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta^p} H^p_{DR}(M) \xrightarrow{h^{*,p}} H^p_{DR}(U) \oplus H^p_{DR}(V) \longrightarrow \ldots$$

donc (isomorphisme de l'image de $h^{*,p}$ avec tout supplémentaire du noyau)

$$H^p_{DR}(M) \cong \mathrm{Im}\ h^{*,p} \oplus \mathrm{Im}\ \delta^p.$$

Si $H^{p-1}_{DR}(U \cap V), H^p_{DR}(U)$ et $H^p_{DR}(V)$ sont de dimension finies, il en est de même de $H^p_{DR}(M)$.

Or M peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ et $H^p_{DR}(\mathbb{R}^n)$ est nul sauf pour $p = 0$, $H^0_{DR}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. Le théorème s'en déduit par une récurrence simple sur le nombre d'ouverts du recouvrement de M.

6.2.2

Supposons M compacte, à base dénombrable d'ouverts.

La dualité de Poincaré donne un isomorphisme

$$H^p_{DR}(M) \cong \left(H^{n-p}_{DR,c}(M)\right)^* = \left(H^{n-p}_{DR}(M)\right)^*$$

donc

$$b_p(M) = b_{n-p}(M).$$

En particulier si $n = \dim M$ est *impair*, la caractéristique d'Euler-Poincaré de M est nulle: $\chi(M) = 0$.

7 Cohomologie de De Rham invariante à gauche d'un groupe de Lie

7.1 cohomologie invariante à gauche

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Pour $p \geqslant 0$, la différentielle extérieure $d : \mathfrak{D}_p(G) \longrightarrow \mathfrak{D}_{p+1}(M)$ envoie $\mathfrak{D}_p^L(G)$ dans $\mathfrak{D}_{p+1}^L(G)$ puisque $d\tilde{\omega} = \widetilde{d\omega}$ $\forall \omega \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^*$. Soit $Z_L^p(G) = Z_{DR}^p(G) \cap \mathfrak{D}_p^L$, $B_L^p(G) = d\left(\mathfrak{D}_{p-1}^L(G)\right)$, $B_L^0(G) = \{0\}$. L'espace vectoriel quotient

$$H_L^p(G) = Z_L^p(G) \,/\, B_L^p(G)$$

est le *p-ième groupe de cohomologie de De Rham invariante à gauche de G.*

L'application $\omega \longmapsto \tilde{\omega}$ induit un isomorphisme

$$H_{\mathbb{R}}^p(\mathfrak{g}) \longrightarrow H_L^p(G).$$

7.2 application canonique de $H_L^p(G)$ dans $H_{DR}^p(G)$

On appelle *application canonique de $H_L^p(G)$ dans $H_{DR}^p(G)$* l'application qui associe à la classe de $\tilde{\omega}$ modulo $B_L^p(G)$ ($\omega \in Z_{\mathbb{R}}^p(\mathfrak{g})$) la classe de $\tilde{\omega}$ modulo $B^p(G)$.

En général, cette application n'est *ni injective, ni surjective.*

7.3 Exemple de $SL(2,\mathbb{R})$

7.3.1

Soit $G = SL(2,\mathbb{R})$ le groupe des matrices 2×2 à coefficients réels, de déterminant 1:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; ; a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

En tant que variété différentiable, G est difféomorphe à $(\mathbb{R}\,/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En effet, tout $g \in G$ peut s'écrire sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ unique modulo 2π et $t, s \in \mathbb{R}$ uniques. C'est la *décomposition d'Iwasawa.* En particulier, G est connexe , mais non simplement connexe.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est l'algèbre de lie $s\ell(2,\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels, de trace nulle:

$$\mathfrak{g} = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \,, e^{tA} \in G \ \forall t \in \mathbb{R} \right\} = s\ell(2,\mathbb{R})$$

et $[A,B] = AB - BA \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}$.

Les trois matrices

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathfrak{g}$ avec les relations de commutation

$$[H, X] = 2X, \ [H, Y] = -2Y, \ [X, Y] = H.$$

7.3.2 calcul de l'homologie de G

Pour calculer l'homologie de G, on utilise la suite de Mayer-Viétoris. En effet, $G = U \cup V$ avec

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d = \frac{1+bc}{a} \end{pmatrix} \ ; a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0 \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c = \frac{ad-1}{b} & d \end{pmatrix} \ ; a, b, d \in \mathbb{R}, \ b \neq 0 \right\}.$$

U est homéomorphe au sous-ensemble $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3, \ x \neq 0 \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ par l'application $\phi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d = \frac{1+bc}{a} \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$, et V est homéomorphe à $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3, \ y \neq 0 \right\}$ par l'application $\psi : \begin{pmatrix} a & b \\ c = \frac{ad-1}{b} & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ d \end{smallmatrix}\right)$.

La restriction de ϕ à $U \cap V$ est un homéomorphisme de $U \cap V$ sur

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3, \ x \neq 0, \ y \neq 0 \right\}$$

En particulier, $U \cap V$ a 4 composantes connexes, et U et V en ont chacun 2. Considérons les éléments suivants de G:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ g_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ g_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce sont 4 représentants des 4 composantes connexes distinctes de $U \cap V$. Donc $H_0(U \cap V)$ a pour base $([g_1]_{U\cap V}, [g_2]_{U\cap V}, [g_3]_{U\cap V}, [g_4]_{U\cap V})$. g_1, g_2 ne sont pas dans la même composante de U mais sont dans la même composante de V et de même pour g_3, g_4. g_1, g_4 ne sont pas dans la même composante de V mais sont dans la même composante de U et de même pour g_2, g_3. Donc $H_0(U) \oplus H_0(V)$ a pour base $([g_1]_U, [g_2]_U, [g_3]_V, [g_4]_V)$.

Comme $\dim G = 3$, $H_p(G, \mathbb{R}) = H^p_{DR}(G) = \{0\} \ \forall p \geqslant 4$.

La suite de Mayer-Viétoris donne pour $p \geqslant 2$ une suite exacte courte

$$\overbrace{H_p(U) \oplus H_p(V)}^{=\{0\}} \xrightarrow{h_{*,p}} H_p(G) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{g_{*,p-1}} \overbrace{H_{p-1}(U) \oplus H_{p-1}(V)}^{=\{0\}}$$

où δ_p est le morphisme de connexion. Donc

$$H_p(G) \cong H_{p-1}(U \cap V) = \{0\} \ \forall p \geqslant 2.$$

Pour $p = 1$, on a la suite exacte

$$\overbrace{H_1(U) \oplus H_1(V)}^{=\{0\}} \xrightarrow{h_{*,1}} H_1(G) \xrightarrow{\delta_1} H_0(U \cap V) \xrightarrow{g_{*,0}} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{h_{*,0}} H_0(G).$$

Comme G est connexe par arcs, $H_0(G) \cong \mathbb{R}$.

On a :

$$g_{*,0}\left(\sum_{i=1}^{4} u^i[g_i]_{U\cap V}\right) = \left(\sum_{i=1}^{4} u^i[g_i]_U \quad , \quad -\sum_{i=1}^{4} u^i[g_i]_V\right) =$$
$$\left((u^1+u^4)[g_1]_U + (u^2+u^3)[g_2]_U \, , \, (u^1+u^2)[g_1]_V + (u^3+u^4)[g_3]_V\right).$$

Donc $\operatorname{Ker} g_{*,0} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme δ_1 est injective ($\operatorname{Ker} \delta_1 = \{0\}$) et que $\operatorname{Im} \delta_1 = \operatorname{Ker} g_{*,0}$, on a $H_1(G) \cong \mathbb{R}$.

7.3.3

On a:

$H^0_{DR}(G) \cong \mathbb{R}$	$H^1_{DR}(G) \cong \mathbb{R}$	$H^2_{DR}(G) = \{0\}$	$H^3_{DR}(G) = \{0\}$
$H^0_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{R}$	$H^1_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{0\}$	$H^2_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{0\}$	$H^3_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{R}$

Dans le tableau ci-dessus, on a $H^1_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ parce que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; $H^2_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{0\}$ est un cas particulier du *lemme de Whitehead*; $H^3_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{R}$ car la *forme de Killing* de $\mathfrak{g}$, à savoir la forme bilinéaire $(X, Y) \longmapsto \operatorname{Tr}(XY)$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, donne le 3-cocycle $\varphi \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}^* : \varphi(X, Y, Z) = \operatorname{Tr}([XY]Z) \; \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$. φ n'est pas un cobord, donc $H^3_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et est alors égal à $\mathbb{R}$ puisque de dimension au plus 1.

L'application canonique Φ de $H^p_L(G) \cong H^p_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ dans $H^p_{DR}(G)$ n'est *pas injective pour* $p = 3$ *et pas surjective pour* $p = 1$.

7.4 Autre exemple : $GL^+(n, \mathbb{R})$

7.4.1

Soit $G = GL^+(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices $n \times n$, à coefficients réels, de déterminant > 0. Toute $A \in G$ admet une *décomposition polaire* unique $A = VH$, avec $V \in O(n, \mathbb{R})$ matrice orthogonale réelle et $H = \sqrt{A^*A}$ symétrique définie positive. En fait, comme $det\ A > 0$, on a $V \in SO(n, \mathbb{R})$.

Or l'exponentielle est une bijection de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des matrices symétriques réelles sur le cône convexe $\mathcal{S}^+$ des matrices symétriques réelles définies positives:

$$exp : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}^+.$$

Donc on a $A = Ve^h$ pour un $h \in \mathcal{S}$, d'où une bijection

$$G \longrightarrow SO(n, \mathbb{R}) \times \mathcal{S}$$

définie par $A = Ve^h \longmapsto (V, h)$. Cette bijection est un C^∞-difféomorphisme. Cela implique que $K = SO(n, \mathbb{R})$ est un *déformation-rétract de* G: si i est l'injection de K dans G et r l'application de G dans K définie par $r(A) = V$ pour $A = Ve^h$, on a $r \circ i = Id_K$ et $i \circ r \sim Id_G$. (l'application $F : (t, A) \mapsto F(t, A) = Ve^{th}$ est une homotopie de $i \circ r$ sur Id_G, puisque $F(0, A) = V = r(A)$ et $F(1, A) = Ve^h = A \quad \forall A \in G$, donc $F(0, \cdot\,) = i o r$ et $F(1, \cdot\,) = Id_G$.)

7.4.2

Comme K est un déformation-rétract de G, on a pour tout p:

$$H^p_{DR}(G) \cong H^p_{DR}(K).$$

En particulier, comme $\dim G = n^2 > \dim K$,

$$H^{n^2}_{DR}(G) \cong H^{n^2}_{DR}(K) = \{0\}.$$

Mais l'algèbre de Lie de G est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = g\ell(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ à coefficients réels munie du crochet habituel, et l'on a:

$$H^{n^2}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{R}.$$

L'application canonique Φ de $H^{n^2}_L(G) \cong H^{n^2}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ dans $H^{n^2}_{DR}(G)$ n'est *pas injective.*

7.4.3

Une situation analogue se produit pour tout groupe de Lie *non compact* G car il existe un sous-groupe compact qui est un déformation-rétract de G.

7.5

La question se pose donc de façon naturelle:

Question: *Pour quels groupes de Lie l'application canonique de* $H^p_L(G)$ *dans* $H^p_{DR}(G)$ *est-elle bijective pour tout* p *, i.e.* $H^p_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) \cong H^p_{DR}(G) \quad \forall p$*?*

Réponse: *Pour les groupes de Lie compacts connexes*

7.6

La cohomologie de De Rham n'est pas bien adaptée aux groupes non-compacts, puisqu'on a vu qu'elle se ramène au cas compact. La bonne notion est la cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

8 Cohomologie de De Rham bi-invariante d'un groupe de Lie

Une autre notion qu'on peut introduire est la cohomologie de De Rham bi-invariante.

8.1 formes bi-invariantes

Une forme différentielle ω sur G est dite *bi-invariante* si elle est invariante à gauche et à droite: $(L_a)^*(\omega) = \omega, (R_a)^*(\omega) = \omega \quad \forall a \in G$.

8.2 G-modules et $\mathfrak{g}$-modules

G étant un groupe de Lie, on appelle G-module un espace vectoriel E muni d'une action continue de G, i.e. une application continue $(x, v) \mapsto x \cdot v$ de $G \times E$ dans E telle que $x \cdot (y \cdot v) = (x \cdot y) \cdot v \quad \forall x, y \in G, \quad \forall v \in E$ et $e \cdot v = v \ \forall v \in E$ (e élément neutre de G). Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, on appelle $\mathfrak{g}$-module un espace vectoriel E muni d'une action de $\mathfrak{g}$, i.e. une application $(X, v) \mapsto X \cdot v$ de $\mathfrak{g} \times E$ dans E telle que $[X, Y] \cdot v = X \cdot (Y \cdot v) - Y \cdot (X \cdot v) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \forall v \in E$.

8.3 exemple: action adjointe d'un groupe de Lie

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G est un G-module pour l'action adjointe de G définie par:

$$x \cdot X = Ad_G(x)(X) = (\mathrm{Int}(x))_{*_e}(X) \quad \forall x \in G, \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

où $\mathrm{Int}(x)$ est l'automorphisme intérieur défini par x:

$$\mathrm{Int}(x)(y) = xyx^{-1} \quad \forall y \in G.$$

On a donc par définition

$$x\,(\exp X)\,x^{-1} = \exp\ (Ad_G(x)(X)) = \exp\ (x \cdot X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}\ , \forall x \in G.$$

Le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ est un G-module pour l'action *contragrédiente* de l'action adjointe, appelée action *coadjointe* de G, définie par:

$$\langle Y\ ,\ x \cdot \omega \rangle = \langle x^{-1} \cdot Y\ ,\ \omega \rangle \quad \forall x \in G, \quad \forall \omega \in \mathfrak{g}^* \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

De même, $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ est un G-module pour l'action coadjointe:

$$(x \cdot \omega)(X_1, \ldots, X_p) = \omega(x^{-1} \cdot X_1, \ldots, x^{-1} \cdot X_p)$$
$$\forall x \in G, \quad \forall \omega \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \quad \forall X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{g}.$$

8.4 exemple: action adjointe d'une algèbre de Lie

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, elle est elle-même un $\mathfrak{g}$-module pour l'*action adjointe* définie par

$$X \cdot Y = ad(X)(Y) = [X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

De même, $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ est un $\mathfrak{g}$-module pour l'action coadjointe définie par :

$$(X \cdot \omega)(X_1, \dots, X_p) = -\sum_{i=1}^{p} \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_p)$$

$$\forall \omega \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \quad \forall X, X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{g}.$$

8.5 lien entre action adjointe de G et action adjointe de $\mathfrak{g}$

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, l'application $t \mapsto (\exp tX) \cdot Y$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est dérivable et sa dérivée en 0 est $[X, Y]$.

Il en résulte que l'application $t \mapsto (\exp tX) \cdot \omega$ de $\mathbb{R}$ dans $\bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ est dérivable et sa dérivée en 0 est:

$$\left[\frac{d}{dt}(\exp tX) \cdot \omega\right]_{t=0} = X \cdot \omega.$$

En effet:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dt}(\exp tX) \cdot \omega\right]_{t=0} (X_1, \dots, X_p) &= \left[\frac{d}{dt}((\exp tX) \cdot \omega)(X_1, \dots, X_p)\right]_{t=0} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\omega((\exp\ -tX) \cdot X_1, \dots, (\exp\ -tX) \cdot X_p)\right]_{t=0} \\
&= -\sum_{i=1}^{p} \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_p) = (X \cdot \omega)(X_1, \dots, X_p).
\end{aligned}$$

Ainsi l'action coadjointe de $\mathfrak{g}$ est la dérivée de l'action coadjointe de G.

8.6 complexe des formes bi-invariantes

8.6.1

Théorème 18 *Une forme bi-invariante est fermée, i.e. de différentielle nulle. Plus précisément, pour toute* $\omega \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^*$*, si la forme* $\tilde{\omega}$ *est invariante à droite on a* $d\tilde{\omega} = 0$*, i.e.* $\tilde{\omega} \in Z^p_{DR}(G)$*. De plus, si* G *est connexe, on a en notant* $\left(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*\right)^G = \{\omega \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \ ; \ a \cdot \omega = \omega \quad \forall a \in G\}$ *et* $(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} = \{\omega \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \ ; \ X \cdot \omega = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\}$:

$$\tilde{\omega} \textit{ invariante à droite} \iff \omega \in \left(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*\right)^G = \left(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*\right)^{\mathfrak{g}}.$$

Enfin,

$$\left(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*\right)^{\mathfrak{g}} \subset Z^p_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}).$$

Démonstration.
On a

$$\begin{gathered}
\tilde\omega \text{ invariante à droite } \iff \tilde\omega = (R_a)^*(\tilde\omega) \quad \forall a \in G \\
\iff \omega = \tilde\omega_e = (R_a)^*_e(\tilde\omega_a) = (R_a)^*_e\left((L_{a^{-1}})^*_a(\tilde\omega_e)\right) = \left((R_a)^*_e \circ (L_{a^{-1}})^*_a\right)(\tilde\omega_e) = \\
{}^t\!\left((L_{a^{-1}})_{*_a} \circ (R_a)_{*_e}\right)(\tilde\omega_e) = \left(\mathrm{Int}(a^{-1})\right)^*_e(\omega) = a \cdot \omega \quad \forall a \in G \\
\iff \omega \in \left(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*\right)^G
\end{gathered}$$

Par différentiation, on a d'autre part: $(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*)^G \subset (\bigwedge^p \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ et l'égalité résulte de la connexité de G. D'autre part, $(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \subset Z^p_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ résulte de la formule

$$2d\omega(X_1, \ldots, X_{p+1}) = -\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \ (X_i \cdot \omega)\left(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{p+1}\right)$$

pour $\omega \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^*, \quad X_1, \ldots, X_{p+1} \in \mathfrak{g}$.

8.6.2

On a donc un complexe des formes différentielles bi-invariantes, avec une différentielle nulle: $d = 0$:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{D}_0^{\text{bi-inv}}(G) \xrightarrow{d=0} \mathfrak{D}_1^{\text{bi-inv}}(G) \xrightarrow{d=0} \ldots \xrightarrow{d=0} \mathfrak{D}_p^{\text{bi-inv}}(G) \xrightarrow{d=0} \mathfrak{D}_{p+1}^{\text{bi-inv}}(G) \xrightarrow{d=0} \ldots \\
\ldots \xrightarrow{d=0} \mathfrak{D}_n^{\text{bi-inv}}(G) \xrightarrow{d=0} \{0\} \qquad (n = \dim G)
\end{gathered}$$

avec pour tout p,

$$\mathfrak{D}_p^{\text{bi-inv}}(G) \cong \left(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*\right)^G.$$

Comme la différentielle est nulle, ce complexe est sa propre cohomologie. On l'appelle *cohomologie bi-invariante* de G.

8.7 comparaison entre cohomologie bi-invariante et cohomologie de l'algèbre de Lie

Si G est un groupe de Lie connexe, on a le diagramme commutatif suivant d'applications canoniques.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_p^{\text{bi-inv}}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^p_L(G) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^p_{DR}(G) \\
(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \arrow[r] & H^p_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) &
\end{tikzcd}$$

Si G est compact toutes les applications de ce diagramme sont des isomorphismes. Cependant, les applications canoniques $\mathfrak{D}_p^{\text{bi-inv}}(G) \longrightarrow H_L^p(G)$ et $(\bigwedge^p \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \longrightarrow H_{\mathbb{R}}^p(\mathfrak{g})$ sont encore des isomorphismes dans un cas plus général que le cas compact, à savoir le cas *réductif*: c'est le cas où l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est *réductive*, ce qui signifie par définition que l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ est semi-simple, i.e. diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Comme exemple de groupe réductif, citons $GL(n, \mathbb{R})$.

9 Exemples de polynômes de Poincaré d'algèbres de Lie

Le polynôme de Poincaré d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension n est défini par $P_{\mathfrak{g}}(t) = \sum_{p=0}^{n} \dim H_{\mathbb{R}}^p(\mathfrak{g})\, t^p \in \mathbb{Z}[t]$.

9.1 $\mathfrak{g} = gl(n, \mathbb{R})$

$$P_{gl(n,\mathbb{R})}(t) = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + t^{2p-1}\right).$$

9.2 $\mathfrak{g} = sl(n, \mathbb{R})$

$$P_{sl(n,\mathbb{R})}(t) = \prod_{p=2}^{n} \left(1 + t^{2p-1}\right).$$

9.3 cas d'un groupe connexe compact

Si G est compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$,

$$P_G(t) = P_{\mathfrak{g}}(t) = (1 + t^{2m_1+1}) \ldots (1 + t^{2m_\ell+1}).$$

avec $m_1, \ldots m_\ell \in \mathbb{N}$. En particulier, $P_G(-1) = 0$, i.e. la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(G)$ d'un groupe de Lie compact connexe est *nulle*.

Cela montre que la sphère $\mathbb{S}^n$ ne peut pas être munie d'une structure de groupe de Lie si n est pair puisque dans ce cas la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 2.

10 cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes

10.1 Définitions et notations

La cohomologie étant invariante par extension du corps de base, on se place dans toute la suite sur le corps $\mathbb{C}$.

10.1.1 rang et poids pour une algèbre de Lie nilpotente

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. La *série centrale descendante* $\mathcal{C}^p\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ est définie par récurrence par $\mathcal{C}^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \mathcal{C}^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \ldots, \mathcal{C}^{p+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^p\mathfrak{g}], \ldots$. où $[\mathfrak{g}, \mathcal{C}^p\mathfrak{g}]$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\{[X, Y]\,;\, X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathcal{C}^p\mathfrak{g}\}$.

$\mathfrak{g}$ est dite *nilpotente* s'il existe $p \geqslant 1$ tel que $\mathcal{C}^p\mathfrak{g} = \{0\}$.

Une *dérivation de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ est un endomorphisme δ de $\mathfrak{g}$ tel que $\delta([X, Y]) = [\delta(X), Y] + [X, \delta(Y)]\ \forall X, Y \in \mathfrak{g}$. L'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$ forme une sous-algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie des endomorphismes de $\mathfrak{g}$ munie du crochet habituel $[A, B] = A \circ B - B \circ A$.

On appelle *tore* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie une sous-algèbre de Lie commutative de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ formée de dérivations diagonalisables. Si T est un tore de $\mathfrak{g}$, les éléments de T sont *simultanément diagonalisables* donc il existe une base $(x_1, ..., x_n)$ de $\mathfrak{g}$ formée de vecteurs propres pour T, i.e. $t(x_i) = \alpha_i(t)x_i\ \forall t \in T$ où α_i appartient au dual T^* de T. Les α_i sont les *poids de* $\mathfrak{g}$ *par rapport à* T.

Tous les tores *maximaux* de $\mathfrak{g}$ ont la même dimension, appelée *rang (torique)* de $\mathfrak{g}$.

10.1.2 cohomologie triviale et adjointe

Soit E un $\mathfrak{g}$-module et $C^p(\mathfrak{g}, E) = (\bigwedge^p \mathfrak{g}^*) \otimes_{\mathbb{C}} E$ l'espace vectoriel des p-cochaines à valeurs dans E ($p \geqslant 0$), i.e. l'espace vectoriel des applications p-linéaires alternées $f : \underbrace{\mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g}}_{p \text{ fois}} \longrightarrow E$. L'opérateur cobord $d : C^{p-1}(\mathfrak{g}, E) \longrightarrow C^p(\mathfrak{g}, E)$ ($p \geqslant 1$) est défini par

$$\begin{aligned} df(X_1, ..., X_p) &= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} X_i \cdot f(X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., X_p) \\ &\quad + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} f([X_i, X_j], ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_p) \end{aligned}$$

pour tous $X_1, .., X_p \in \mathfrak{g}$, et on introduit:

$$\begin{aligned} Z^p_E(\mathfrak{g}) &= \{f \in C^p(\mathfrak{g}, E);\ df = 0\} \\ B^p_E(\mathfrak{g}) &= d(C^{p-1}(\mathfrak{g}, E)) \\ H^p_E(\mathfrak{g}) &= Z^p_E(\mathfrak{g}) \,/\, B^p_E(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

Si $E = \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}$-module trivial avec l'action nulle, on retrouve la cohomologie $H^p_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ définie comme dans le cas de $\mathbb{R}$. On l'appelle la *cohomologie triviale de* $\mathfrak{g}$.

Si $E = \mathfrak{g}$ avec l'action adjointe de $\mathfrak{g}$, on obtient la *cohomologie adjointe de* $\mathfrak{g}$.

$H^0_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = Z^0_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ est le centre $\{X \in \mathfrak{g}\ ;\ [X, Y] = 0\ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ de $\mathfrak{g}$; $Z^1_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})=$ Der $\mathfrak{g}$; $H^1_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})=$ Der $\mathfrak{g}\,/\mathrm{ad}\ \mathfrak{g}$, où $\mathrm{ad}\ \mathfrak{g} = \{\mathrm{ad}\ X\ \ ;\ X \in \mathfrak{g}\}$.

10.1.3 action du tore maximal sur la cohomologie triviale

Soit T un tore maximal de $\mathfrak{g}$. $C^p(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ est un T-module pour l'action $(t, \omega) \mapsto t \cdot \omega$ avec

$$(t \cdot \omega)(X_1, \ldots, X_p) = -\sum_{i=1}^{p} \omega(X_1, \ldots, t(X_i), \ldots, X_p)$$

pour $t \in T, \omega \in C^p(\mathfrak{g}, \mathbb{C}), X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{g}$. Cette action commute avec l'opérateur cobord d et définit une structure de T-module sur $H^p_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$.

10.1.4 poids sur la cohomologie

Soit $\{x_1, \ldots x_n\}$ une base de $\mathfrak{g}$ formée de vecteurs propres pour T: $t(x_i) = \alpha_i(t) x_i \ \forall t \in T$ où les α_i sont les poids de $\mathfrak{g}$ par rapport à T. Soit $(\omega^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base de $\mathfrak{g}^*$ duale de la base $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Il est immédiat que $t(\omega^i) = -\alpha_i(t)\omega^i \ \forall t \in T$, i.e. ω^i est un vecteur propre pour T, de poids $-\alpha_i$.

De même, $\omega^{i_1, \ldots, i_p} = \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_p} \in C^p(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ est un vecteur propre de poids $-\alpha_{i_1} - \ldots - \alpha_{i_p}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n)$. Il en est de même de la classe de cohomologie $[\omega^{i_1, \ldots, i_p}] \in H^p_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$.

10.2 cocycles harmoniques

Pour tout sous-ensemble H de cardinal p de $\{1, \ldots, n\}$

$$H = \{i_1, \ldots, i_p\}, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$$

notons

$$\omega^H = \omega^{i_1, \ldots, i_p}.$$

Soit alors $(.|.)$ le produit scalaire hermitien défini sur $C^p(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ by

$$(\omega^H | \omega^K) = \delta_{H,K} \text{ (symbole de Kronecker)},$$

et d^* l'adjoint de d pour ce produit scalaire. Un cocycle $\omega \in Z^p_{\mathbb{C}}$ est dit *harmonique* si $d\omega = d^*\omega = 0$.

10.2.1

Lemme 7 ([?]) *Soient d, δ des endomorphismes de l'espace vectoriel de dimension finie E tels que $d^2 = \delta^2 = 0$ et soit $\Delta = d\delta + \delta d$. Si d et δ sont disjoints (i.e. $\forall x \in E \ d\delta x = 0 \Rightarrow \delta x = 0$ et $\delta d x = 0 \Rightarrow dx = 0$) alors*

$$\begin{aligned} Ker\ \Delta &= Ker\ d \cap Ker\ \delta \\ E &= Im\ d \oplus Im\ \delta \oplus Ker\ \Delta \\ Ker\ d / Im\ d &\cong Ker\ \Delta \end{aligned}$$

Démonstration.

Pour $x \in \text{Ker }\Delta$, $d\delta x = -\delta dx$. Si $y = d\delta x$, alors $\delta y = \delta d\delta x = 0$ implique $d\delta x = 0$ i.e. $y = 0$, et donc $\delta x = 0$ d'où $\delta dx = 0$ et $dx = 0$. Ainsi $\text{Ker }\Delta \subset \text{Ker } d \cap \text{Ker }\delta$, et l'égalité en résulte. Maintenant $\text{Im } d \cap \text{Im }\delta = \{0\}$ puisque $dx = \delta z$ implique $d\delta z = 0$ donc $\delta z = 0$. De même, $(\text{Im } d \oplus \text{Im }\delta) \cap \text{Ker }\Delta = 0$, et l'on a donc une somme directe $\text{Im } d \oplus \text{Im }\delta \oplus \text{Ker }\Delta$. Comme $\text{Im }\Delta \subset \text{Im } d \oplus \text{Im }\delta$ et $\dim\ \text{Im }\Delta + \dim\ \text{Ker }\Delta = \dim\ E$ on a $\text{Im } d \oplus \text{Im }\delta = \text{Im }\Delta$ et $E = \text{Im }\Delta \oplus \text{Ker }\Delta$. L'application $x \mapsto [x]$ de $\text{Ker }\Delta$ dans $\text{Ker } d/\text{Im } d$ est injective; montrons qu'elle est surjective. Soit $z \in \text{Ker } d$. Alors $z = \alpha + \beta$, $\alpha \in \text{Im }\Delta$, $\beta \in \text{Ker }\Delta$, $\alpha = d\delta\gamma + \delta d\gamma$, $\gamma \in E$; $dz = 0 = d\alpha = d\delta d\gamma$ donc $\delta d\gamma = 0$ et $\alpha \in \text{Im } d$ i.e. $[z] = [\beta]$. □

10.2.2

Comme d et d^* sont disjoints, on applique le lemme avec $\bigoplus_{p=0}^{n} C^p(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$, $\text{Ker } d/\text{Im } d = \bigoplus_{p=0}^{n} H^p_{\mathbb{C}}$. Le calcul de la cohomologie se réduit donc au calcul des cocycles harmoniques, i.e. au calcul du noyau du laplacien Δ.

10.3 L'Hypothèse de Riemann pour la cohomologie triviale

10.3.1

On dit qu'une algèbre nilpotente $\mathfrak{g}$ avec un tore maximal T vérifie l'Hypothèse de Riemann (notée HR) si $H^i_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ et $H^j_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ *n'ont aucun poids commun pour* $i \neq j (1 \leqslant i, j \leqslant n = \dim \mathfrak{g}.)$

10.3.2 exemple: l'algèbre de Heisenberg

Soit $\mathfrak{g} = \mathcal{H}_1$ l'algèbre de Heisenberg de dimension 3 : c'est l'algèbre de Lie de base (x_1, x_2, x_3), avec la relation de commutation $[x_1, x_2] = x_3$. Le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathbb{C}x_3$, et l'on a $\mathcal{C}^2\mathfrak{g} = \mathbb{C}x_3$, $\mathcal{C}^3\mathfrak{g} = \{0\}$.

La matrice d'une dérivation δ de $\mathfrak{g}$ dans la base (x_1, x_2, x_3) est

$$\delta = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & 0 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_1^1 + \xi_2^2 \end{pmatrix}$$

où $\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3, \xi_2^1, \xi_2^2, \xi_2^3$ sont des paramètres indépendants. Si l'on note δ_i^j la dérivation obtenue en prenant

$$\xi_{i'}^{j'} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i' \text{ et } j = j' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$(\delta_1^1, \delta_1^2, \delta_1^3, \delta_2^1, \delta_2^2, \delta_2^3)$ est une base de $\text{Der}(\mathfrak{g})$. En notant $t_1 = \delta_1^1, t_2 = \delta_2^2$, $T = \mathbb{C}t_1 \oplus \mathbb{C}t_2$ est un tore maximal de $\mathfrak{g}$. La base (x_1, x_2, x_3) diagonalise l'action de T et en notant (β_1, β_2) la base de T^* duale de (t_1, t_2), les poids de $\mathfrak{g}$ sont $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2$.

En n'écrivant que les images non nulles, d est défini par $d\omega^3 = -\omega^{1,2}$.

Les dimensions des $Z^j_{\mathbb{C}}$ $(0 \leqslant j \leqslant 3)$ sont $(1, 2, 3, 1)$;

Les dimensions des $H^j_{\mathbb{C}}$ $(0 \leqslant j \leqslant 3)$ sont $(1, 2, 2, 1)$.

$H^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}$. Le poids de 1 par rapport à T est nul.

$H^1_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\omega^1] \oplus \mathbb{C}[\omega^2]$ et $[\omega^1], [\omega^2]$ sont de poids respectifs $-\beta_1, -\beta_2$.

$H^2_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\omega^{1,3}] \oplus \mathbb{C}[\omega^{2,3}]$ et $[\omega^{1,3}], [\omega^{2,3}]$ sont de poids respectifs $-2\beta_1 - \beta_2, -\beta_1 - 2\beta_2$.

$H^3_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\omega^{1,2,3}]$ et $[\omega^{1,2,3}]$ est de poids $-2\beta_1 - 2\beta_2$.

On voit que $\mathfrak{g}$ vérifie HR.

Enfin, d^* est défini par $d^*\omega^{1,2} = -\omega^3$. Δ est défini par $\Delta\omega^3 = \omega^3$, $\Delta\omega^{1,2} = \omega^{1,2}$. Les cocycles $\omega^1, \omega^2, \omega^{1,3}, \omega^{2,3}, \omega^{1,2,3}$ sont harmoniques.

10.3.3

Le nom HR vient du fait que l'on peut définir une *fonction* $\zeta_{\mathfrak{g}}$ de la variable complexe z, qui est une fonction rationnelle à cefficients dans l'extension de corps $\mathbb{C}(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n})$, et HR se traduit par le fait que les facteurs de $\zeta_{\mathfrak{g}}$ sont premiers entre eux deux à deux. Pour l'algèbre de Heisenberg, cette fonction est:

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(z) = \frac{(1 - e^{-\beta_1} z)(1 - e^{-\beta_2} z)(1 - e^{-2\beta_1 - 2\beta_2} z)}{(1 - z)(1 - e^{-2\beta_1 - \beta_2} z)(1 - e^{-\beta_1 - 2\beta_2} z)}.$$

10.3.4 les résultats connus

En utilisant le système de calcul formel *REDUCE* de A.C HEARN, sur l'un des ordinateurs IBM RISC 6000 du CRI (Centre de Ressources Informatiques) de l'Université de Bourgogne, on a a calculé dans [?] les cohomologies triviale et adjointe des algèbres de Lie nilpotentes de dimension $\leqslant 7$. [?] est un livre électronique librement accessible et téléchargeable au format *Postscript* compressé sur *Internet* à l'URL:

`http://www.u-bourgogne.fr/archives/math/Magnin1.ps.Z`

Le résultats sont les suivants:

Pour les algèbre de dimension $\leqslant 6$, HR est toujours vérifiée.

Pour les algèbres de dimension 7, la situation est différente d'une part parce qu'il existe des algèbres ayant un *poids nul*, d'autre part du fait de l'existence de *séries continues* d'algèbres non isomorphes ayant un même système de poids.

De façon précise, on a, suivant le rang de l'algèbre, le nombre suivant de systèmes de poids possibles (on se borne au cas des algèbres qui ne sont pas des produits directs).

rang	nombre de systèmes de poids
0	1
1	21 + (3 ayant un poids nul)
2	45
3	24
4	5
	total: 99

Il est clair que les algèbres ayant un poids nul ne vérifient pas HR. Si l'on écarte donc les systèmes ayant un poids nul, on obtient deux types de systèmes de poids:

- Type 1: Il n'existe qu'une seule algèbre de Lie (les algèbres isomorphes sont identifiées) ayant ce système de poids.
- Type 2: Il existe une famille continue à un paramètre $\mathfrak{g}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ d'algèbres de Lie nilpotentes, avec $\mathfrak{g}_\lambda$ isomorphe à $\mathfrak{g}_{\lambda'}$ si et seulement si λ' se déduit de λ par un groupe fini de transformations (groupe de symétries du diagramme de Dynkin), et un nombre fini de *points limites* des $\mathfrak{g}_\lambda$ ayant ce système de poids.

Toutes les algèbres de Lie correspondant à un système de poids de type 1 vérifient HR.

Pour un système de type 2, la série continue vérifie HR, sauf pour un nombre fini de *valeurs singulières* du paramètre pour lesquelles la cohomologie n'est pas la cohomologie générique. Les points limites peuvent satisfaire ou non HR.

10.3.5 un problème ouvert

En dimension plus grandes que 7, on ne sait encore à peu près rien sur HR. Cela est dû d'une part au fait que l'on ne dispose pas d'une classification en dimension quelconque des algèbres de Lie nilpotentes ni des systèmes de poids, bien que des classifications partielles aient été faites jusqu'en dimension 9, et d'autre part au fait que des séries continues à *multiparamètres* , i.e. à paramètre dans $\mathbb{C}^k, k \geqslant 2$, apparaissent.

Cependant on connaît des cas où HR est satisfaite dans des dimensions quelconques, par exemple l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{g} = \mathcal{H}_N$ de dimension $2N+1$, $(N \geqslant 1)$: c'est l'algèbre de Lie de base $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2N+1}$, avec les relations de commutation

$$[x_i, x_{N+i}] = x_{2N+1} \; (1 \leqslant i \leqslant N).$$

Un autre exemple où HR est satisfaite est l'algèbre *filiforme générique* de dimension $n+1$ de base $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ avec les relations de commutation

$$[x_0, x_i] = x_{i+1} \; \forall i \; 1 \leqslant i < n.$$

Références

[Be-Ga] BERENSTEIN C.A., GAY R., " *Complex variable* ", Springer , GTM volume 125 , 1991.

[Bo-Hu] BOTT R., HU L.W., " *Differential Forms in Algebraic Topology* ", Springer , GTM volume 82, 1982.

[Bou] BOURBAKI N., " *Groupes et Algèbres de Lie* ", Chap. 1, Hermann, Paris, 1971.

[Co] CONWAY J.B., " *Functions of one complex variable* ", Springer , GTM volume 11 (2de édition), 1978.

[Cro] CROMWELL P.R., " *Polyedra* ", Cambridge , 1996.

[Gr-Hal-Va] GREUB N., HALPERIN S., VANSTONE R. *"Connections, Curvature and Cohomology"*, (3 volumes), Academic Press, NY 1972.

[Ko] KOSTANT B., *"Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem"*, Ann. Math., **74** , 1961, 329-388.

[Mag] MAGNIN L., *"Adjoint and trivial cohomology tables for indecomposable nilpotent Lie algebras of dimension ≤ 7 over $\mathbb{C}$"*, livre électronique (906 pages + vi), 1995, téléchargeable gratuitement au format *Postcript* sur Internet à l'URL

`http://www.u-bourgogne.fr/archives/math/Magnin1.ps.Z`

ou par ftp à

`ftp://ftp.u-bourgogne.fr/pub/math/Magnin1.ps.Z`

ou sur le serveur *American Mathematical Society Preprint Server*

`http://www.ams.org/preprints/`

[Mass] MASSEY W.S., " *A Basic Course in Algebraic Topology* ", Springer, GTM volume 127, 1991.

[Ru] RUDIN W., " *Real and Complex Analysis* ", Mac-Graw Hill, (Traduction chez Masson, Paris), 1974.

[Var] VARADARAJAN V.S., " *Lie Groups, Lie Algebras and their Representations* ", Springer , GTM volume 102, 1984.

[Vick] VICK, J.W., " *Homology theory* ", Springer , GTM volume 145, 1994.