JGP - Vol. 3, n. 1, 1986

Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $\leqslant 7$

L. MAGNIN *

Laboratoire de Physique-Mathématique
Université de Dijon
BP 138
21004 - Dijon Cedex

Abstract. *We consider the embedding problem of a nilpotent Lie algebra into a stratified one; we construct all nilpotent Lie algebras of dimension $\leqslant 7$ having a fixed Lie algebra of codimension 1, and we get among other results, a new classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras. This study has applications on the analysis of deformations of the internal space of 11 dimensional Kaluza-Klein theories (non abelian theories) and in 11-dimensional supergravity.*

Resumé. *On étudie le problème du plongement d'une algèbre de Lie nilpotente dans une algèbre de Lie nilpotente stratifiée minimale; on construit toutes les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $\leqslant 7$ contenant une algèbre nilpotente fixée de codimension 1, et l'on obtient entre autres une nouvelle classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6. Cette étude a des applications dans l'analyse de déformations de l'espace interne des théories de Kaluza-Klein de dimension 11 (théories non abéliennes) et en supergravité de dimension 11.*

INTRODUCTION

La classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension finie est un problème à ce jour non résolu et qui présente d'intéressantes applications à d'autres théories, par exemple les algèbres de Kac-Moody [10].

La dimension 7 joue un rôle particulier, car c'est la plus petite dimension

---

* UA C.N.R.S. 1102.

Key-Words: Nilpotent Algebras, Classification, Lie Algebras.
***1980 Mathematics Subject Classification:** 17 B 30.*

où apparaissent divers phénomènes: de classification (séries continues d'algèbres non-isomorphes), de structure (existence d'idéaux abéliens maximaux de différentes dimensions), ou liés à la notion d'algèbre nilpotente stratifiée.

Cette notion a été introduite récemment par divers auteurs, soit comme déformation du cas abélien $\mathbb{R}^n$ pour l'Analyse Harmonique [4], soit comme hypothèse technique dans certains problèmes d'analyticité jointe et séparée pour les représentations des groupes de Lie nilpotents [2]. Dans ce dernier cas, le résultat obtenu est le suivant: pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotente stratifiée engendrée par $X_1, \ldots, X_p$ et $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ représentation unitaire continue du groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\varphi \in \mathcal{H}_\pi$ est un vecteur analytique pour π si et seulement si φ est un vecteur C^∞ qui vérifie pour un $C > 0$

$$\| d\pi(X_{i_1}) \ldots d\pi(X_{i_n})\varphi \| < C^n n! \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall i_1, \ldots, i_n, \ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant p,$$

où $d\pi$ est la représentation dérivée de $\mathfrak{g}$.

Ce résultat demeure valable pour les algèbres nilpotentes non stratifiées, car il est bien connu que toute algèbre de Lie nilpotente de longeur r à p générateurs est quotient d'une algèbre de Lie stratifiée: l'algèbre de Lie nilpotente de longueur r libre à p générateurs; mais d'autres méthodes permettent d'éliminer totalement l'hypothèse de stratification.

De ce fait, il semble intéressant d'étudier les relations entre algèbres stratifiées et non-stratifiées, et un problème naturel est celui du plongement d'une algèbre de Lie nilpotente dans une algèbre stratifiée «minimale».

Mais la dimension 7 joue aussi un rôle majeur en physique contemporaine.

En théorie de Kaluza-Klein généralisée, on considère une variété fibrée sur l'espace-temps physique (ou une variété produit) dont la fibre-type est une variété dite «espace interne»; sur l'espace interne doit opérer le groupe de grande unification (forte-électrofaible) $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Le dimension minimale d'une variété sur laquelle opère ce groupe est $4 + 2 + 1 = 7$ et l'espace interne est pris comme variété de groupe abélien de dimension 7, en général compact, ce qui aboutit à une théorie de Kaluza-Klein de dimension 11.

De manière analogue au passage de la mécanique classique à la mécanique quantique du cas nilpotent, et dans l'esprit de la théorie des star-produits, nous nous sommes demandé s'il était possible de substituer par *déformations* minimales, à l'espace interne précédent une variété de groupe nilpotent de dimension 7. Le problème conduit naturellement aux questions suivantes 1) classifier toutes les algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7; 2) déterminer les groupes pouvant opérer sur les algèbres de manière cohérente.

L'analyse de supergravité en dimension 11 conduit à des études analogues. On voit l'importance, mathématique et physique, de la dimension 7 pour les algèbres de Lie nilpotentes. Nous donnons ici une étude préliminaire, mais qui nous semble résoudre, dans ce contexte, des problèmes mathématiques naturels ouverts.

Le problème du plongement stratifié peut être formulé de deux façons différentes et dans les deux cas il existe toujours une solution. Mais nous donnons des exemples où il existe plusieurs solutions non isomorphes et même, en dimension 7, un infinité continue de telles solutions.

Nous sommes aussi conduits à essayer de classifier les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $n+1$, contenant, à isomorphisme près, une algèbre de Lie nilpotente fixée de dimension n. Nous introduisons pour cela la méthode des dérivations nilpotentes, la difficulté étant la séparation des séries obtenues en classes de solutions non isomorphes. En dimension 6, on obtient une classification plus fine que la classification de Morosov [8]. En dimension 7, on détermine toutes les algèbres de Lie nilpotentes contenant une algèbre donnée de dimension 6, par des séries comportant des paramètres réels arbitraires; certaines séries comprennent une infinité d'algèbres, d'autres un nombre fini. La séparation qui a pu être effectuée dans un certain nombre de cas montre que la classification annoncée dans [9] est certainement incomplète.

Le corps de base est ici $\mathbb{R}$.

1. ALGEBRES DE LIE STRATIFIÉES

Soit g une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie de longueur r, i.e. $\mathscr{C}^r g \neq 0$, $\mathscr{C}^{r+1} g = 0$ où $(\mathscr{C}^p g)_{p \geqslant 1}$ désigne la série centrale descendante. La suite des $n_i = \dim \mathscr{C}^i g - \dim \mathscr{C}^{i+1} g$, $1 \leqslant i \leqslant r$, sera appelée la graduation de g. On dira qu'un sous-espace vectoriel g_1 de g engendre g comme algèbre de Lie si $g = g_1 + \ldots + g_r$ où g_i est défini inductivement pour $i \geqslant 2$ par $g_i = [g_1, g_{i-1}]$; g est dite stratifiée s'il existe un sous-espace vectoriel g_1 de g tel que $g = g_1 \oplus \oplus \ldots \oplus g_r$. L'existence d'un sous-espace g_1 tel que la somme $g = g_1 + \ldots + g_r$ ne soit pas directe n'implique nullement que g ne soit pas stratifiée, comme le montre l'exemple suivant de dimension 7, plus petite dimension où ce cas se produit: g a pour base (X_i) $1 \leqslant i \leqslant 7$ avec les relations de commutation suivantes:

$$[X_1, X_2] = X_3 + X_7,\ [X_1, X_4] = X_3 - X_5 + 2X_7,\ [X_1, X_5] = X_7$$

$$[X_2, X_3] = X_7,\ [X_2, X_4] = X_5,\ [X_2, X_5] = X_6,\ [X_3, X_4] = X_6.$$

Si $g_1 = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_4$, la somme $g_1 + g_2 + g_3$ n'est pas directe, mais $g_1' = \mathbb{R}X_1 \oplus \mathbb{R}(X_2 + X_5) \oplus \mathbb{R}X_4$ est tel que $g = g_1' \oplus g_2' \oplus g_3'$.

2. CLASSIFICATION DE MOROSOV DES ALGÈBRES NILPOTENTES DE DIMENSION $\leqslant 6$

La classification de Morosov [8] est basée sur la plus grande dimension m d'un idéal abélien maximal: on a toujours $2m \geqslant \sqrt{1 + 8 \dim g} - 1$. Les algèbres nilpotentes de dimension $\leqslant 5$ avaient déjà été classées par d'autres méthodes dans [3]. Par ailleurs, dans [11] a été introduite une méthode qui permet en théorie de classifier toutes les algèbres nilpotentes de dimension $n + 1$ connaissant celles de dimension $\leqslant n$ et leurs groupes d'automorphismes. Les objets classifiants sont alors la dimension k du centre $\mathscr{C}$ de g et certaines orbites dans l'ensemble de tous les sous-espaces de dimension k du second groupe de cohomologie de $g/_{\mathscr{C}}$, pour l'action canonique du groupe des automorphismes de $g/_{\mathscr{C}}$. Cette méthode n'a été appliquée qu'en dimension 6, redonnant la classification de Morosov; le calcul des orbites présentant des difficultés, elle ne semble pas pouvoir être actuellement utilisée pour la classification des algèbres de dimension 7. Mentionnons aussi quelques procédures sur ordinateur [7].

On donne dans le tableau 1 les commutateurs $\neq 0$, et entre parenthèses les dimensions de la série centrale descendante.

Tableau 1

Dimension 1

g_1, algèbre abélienne	(1)

Dimension 2

$(g_1)^2 = g_1 \times g_1$	(2)

Dimension 3

$(g_1)^3$	(3)
$n : [X_1, X_2] = X_3$	(3, 1)

Dimension 4

$(g_1)^4$	(4)
$n \times g_1$	(4, 1)
$g_4 : [X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4$	(4, 2, 1)

Dimension 5

$(g_1)^5$ (5)

$n \times (g_1)^2$ (5,1)

$g_4 \times g_1$ (5, 2, 1)

$g_{5,1} : [x_1, x_2] = x_5,\ [x_3, x_4] = x_5$ (5, 1)

$g_{5,2} : [x_1, x_2] = x_4,\ [x_1, x_3] = x_5$ (5, 2)

$g_{5,3} : [x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_4,\ [x_2, x_5] = x_4$ (5, 2, 1)

$g_{5,4} : [x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_4,\ [x_2, x_3] = x_5$ (5, 3, 2)

$g_{5,5} : [x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_4,\ [x_1, x_4] = x_5$ (5, 3, 2, 1)

$g_{5,6} : [x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_4,\ [x_1, x_4] = x_5,\ [x_2, x_3] = x_5$ (5, 3, 2, 1)

Dimension 6

produits directs. (10) : $(g_1)^6, n \times n, n \times (g_1)^3, g_4 \times (g_1)^2, g_1 \times g_{5,i}$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$
Autres. (22):

$m = 5$

1) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_5] = X_6$ (6, 3, 1)

2) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_1, X_5] = X_6$ (6, 4, 3, 2, 1)

$m = 4$

Centre de dim 3

3) $[X_1, X_2] = X_6,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_2, X_3] = X_5$ (6, 3)

Centre de dim 2

4) $[X_1, X_2] = X_5,\ [X_1, X_3] = X_6,\ [X_2, X_4] = X_6$ (6, 2)

5) $[X_1, X_3] = X_5,\ [X_1, X_4] = X_6,\ [X_2, X_4] = X_5,\ [X_2, X_3] = \gamma X_6$

$(\gamma \neq 0, \alpha^2)$ (6, 2)

6) $[X_1, X_2] = X_6,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_2, X_3] = X_5$ (6, 3, 1)

7) $[X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_2, X_3] = X_6$ (6, 3, 1)

8) $[X_1, X_2] = X_3 + X_5,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_2, X_5] = X_6$ (6, 3, 2)

9) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_5] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_6$ (6, 3, 2)

10) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_5,\ [X_1, X_4] = X_6,\ [X_2, X_4] = X_5,$
$[X_2, X_3] = \gamma X_6\ (\gamma \neq 0, \alpha^2)$ (6, 3, 2)

11) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_2, X_3] = X_6$ (6, 4, 3, 1)

Centre de dim 1

12) $[X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_6,\ [X_2, X_5] = X_6$ (6, 2, 1)

13) $[X_1, X_2] = X_5,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_6,\ [X_2, X_5] = X_6$ (6, 3, 1)

14) $[X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_5,\ [X_2, X_5] = \gamma X_6$
$(\gamma \neq 0)$ (6, 3, 1)

15) $[X_1, X_2] = X_3 + X_5,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_6,$
$[X_2, X_5] = X_6$ (6, 3, 2, 1)

16) $[X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_5, [X_1, X_5] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_5,$
$[X_2, X_4] = X_6$ (6, 3, 2, 1)

17) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_6,\ [X_2, X_5] = X_6$ (6, 3, 2, 1)

18) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_5,$
$[X_2, X_5] = \gamma X_6\ (\gamma \neq 0)$ (6, 4, 3, 1)

19) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_1, X_5] = X_6,$
$[X_2, X_3] = X_6$ (6, 4, 3, 2, 1)

20) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_1, X_5] = X_6,$
$[X_2, X_3] = X_5,\ [X_2, X_4] = X_6$ (6, 4, 3, 2, 1)

m = 3

21) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_5] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_4,\ [X_2, X_4] = X_5,$
$[X_3, X_4] = X_6$ (6, 4, 3, 2, 1)

22) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_5,\ [X_1, X_5] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_4,$
$[X_2, X_4] = X_5,\ [X_3, X_4] = X_6$ (6, 4, 3, 2, 1)

Remarque

1) Il y a 2 types 14 et 2 types 18 non isomorphes ($\gamma = \pm 1$) mais un seul type 5 et un seul type 10 ($\gamma = -1$): si l'on pose $\gamma = 1$ dans les relations de commuta-

tion du type 10, on obtient le type 8 avec $X'_1 = X_1 - X_2$, $X'_2 = X_1 + X_2$, $X'_3 = X_3 - X_4$, $X'_4 = 2(X_5 - X_6)$, $X'_5 = X_3 + X_4$, $X'_6 = 2(X_5 + X_6)$, et de même avec le type 5 on obtient $n \times n$.

2) Les idéaux abéliens d'une algèbre de Lie de dimension $\leqslant 6$ ont tous la même dimension. On verra qu'il n'en est pas de même en dimension 7.

3) Les algèbres de Lie nilpotentes non stratifiées de dimension $\leqslant 5$ sont $g_{5,3}$ et $g_{5,6}$ et celles de dimension 6 sont $g_1 \times g_{5,3}$, $g_1 \times g_{5,6}$ et les types 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 19, 20, 22.

3. PROBLÈME DE STRATIFICATION

3.1. Soit g une algèbre de Lie nilpotente de longueur r et V_n un supplémentaire de $\mathscr{C}^{n+1}g$ dans $\mathscr{C}^n g$ $(1 \leqslant n \leqslant r)$. On a $g = \overset{r}{\underset{n=1}{\oplus}} V_n$. Soit $\delta_t = \overset{r}{\underset{n=1}{\oplus}} t^n \mathrm{id}_{V_n}$ $(t \in \mathbb{R})$, H_n l'ensemble des fonctions f polynomiales de degré n sur g, i.e. $f \circ \delta_t = t^n f$ $\forall t \in \mathbb{R}$, et $P_n = \underset{k \leqslant n}{\oplus} H_k$. L'algèbre de Lie $\hat{g}$ des champs de vecteurs T à coefficients polynomiaux sur g (i.e. dérivations de l'algèbre P des fonctions polynomiales sur g) tels que $TP_n \subset P_{n-1}$ $\forall n$ $(1 \leqslant n \leqslant r)$ est une algèbre de Lie nilpotente stratifiée de longueur r et l'application $\varphi : g \to \hat{g}$ définie par:

$$(\varphi(X)f)(Y) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(H(-tX, Y))\right]_{t=0} \qquad \forall f \in P$$

où $H(\,.,.\,)$ désigne la série de Hausdorff, est un homomorphisme injectif de g dans $\hat{g}$ [6]. $\hat{g}$ ne dépendant que de la graduation de g, toute algèbre de Lie nilpotente de même graduation que g est isomorphe à une sous-algèbre de $\hat{g}$.

Exemple

$\hat{g}_{5,6}$ est l'algèbre de Lie stratifiée de dimension 26 engendrée par

$$\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_3}, \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3}, (\xi_1)^2 \frac{\partial}{\partial \xi_4}, \xi_1 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_4}, (\xi_2)^2 \frac{\partial}{\partial \xi_4},\right.$$

$$\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_4}, (\xi_1)^3 \frac{\partial}{\partial \xi_5}, (\xi_1)^2 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_5}, \xi_1 (\xi_2)^2 \frac{\partial}{\partial \xi_5}, (\xi_2)^3 \frac{\partial}{\partial \xi_5},$$

$$\left.\xi_1 \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_5}, \xi_2 \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_5}, \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_5}\right\} \quad \text{et l'on a}$$

$$\varphi(X_1) = -\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{1}{2} \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + \left(\frac{1}{12} \xi_1 \xi_2 - \frac{1}{2} \xi_3\right) \frac{\partial}{\partial \xi_4} +$$

$$+\left(\frac{1}{12}(\xi_1\xi_3+(\xi_2)^2)\right)-\frac{1}{2}\xi_4\Big)\frac{\partial}{\partial\xi_5}$$

$$\varphi(X_2)=-\frac{\partial}{\partial\xi_2}+\frac{1}{2}\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_3}-\frac{1}{12}(\xi_1)^2\frac{\partial}{\partial\xi_4}-\left(\frac{1}{12}\xi_1\xi_2+\frac{1}{2}\xi_3\right)\frac{\partial}{\partial\xi_5}$$

$$\varphi(X_3)=-\frac{\partial}{\partial\xi_3}+\frac{1}{2}\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_4}+\left(\frac{1}{2}\xi_2-\frac{1}{12}(\xi_1)^2\right)\frac{\partial}{\partial\xi_5}$$

$$\varphi(X_4)=-\frac{\partial}{\partial\xi_4}+\frac{1}{2}\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_5}$$

$$\varphi(X_5)=-\frac{\partial}{\partial\xi_5}$$

où $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ sont les coordonnées sur la base $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ de $\mathfrak{g}_{5,6}$ ayant les relations de commutation données dans le tableau 1. Dans $\hat{\mathfrak{g}}_{5,6}$, $\left\{\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_5}, \frac{\partial}{\partial\xi_1}+\right.$ $\left.+\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_3}+\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}\right\}$ engendre une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{g}_{5,5}$, seule algèbre de dimension 5 ayant même graduation que $\mathfrak{g}_{5,6}$.

3.2. Une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ de longueur r étant fixée, on peut donc poser les 2 questions suivantes:

1) Y-a-t'il une unique algèbre de la plus petite dimension parmi les algèbres nilpotentes stratifiées de longueur r contenant à isomorphisme près toutes les algèbres nilpotentes de même graduation que $\mathfrak{g}$?

2) Y-a-t'il une unique algèbre de la plus petite dimension parmi les algèbres nilpotentes stratifiées, non nécessairement de longueur r, qui contiennent à isomorphisme près $\mathfrak{g}$?

4. MÉTHODE DES DÉRIVATIONS NILPOTENTES

4.1. Les questions ci-dessus mènent au problème suivant: étant donné une algèbre de Lie nilpotente de dimension n, déterminer toutes les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $n+1$ qui la contiennent à isomorphisme près.

LEMME 1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente et δ une dérivation nilpotente de $\mathfrak{g}$. Alors, pour tout $X\in\mathfrak{g}$, $\delta+\operatorname{ad}X$ est nilpotente et le produit semi-direct $\tilde{\mathfrak{g}}_\delta=\mathbb{R}\delta\oplus\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente.*

Démonstration. Pour $Y \in g$, $(\delta + \operatorname{ad} X)^n(Y) = \sum_i C_i$ avec $C_i = [X_0, [X_1, [\ldots [X_{i-1}, X_i] \ldots]$, $X_j = X$ ou Y ou $\delta^{p_j} X$ ou $\delta^{p_j} Y \quad 0 \leqslant j \leqslant i$,

$$n = i + \sum_{j=0}^{i} p_j$$

de sorte que si $\delta^N = 0$ et si r désigne la longueur de g, $(\delta + \operatorname{ad} X)^n = 0$ $\forall n \geqslant (N + 1) r - 1$. ■

Toute sous-algèbre de codimension 1 d'une algèbre de Lie nilpotente étant un idéal, on peut ainsi obtenir à partir d'une algèbre de Lie nilpotente de dimension n toutes les algèbres de Lie de dimension $n + 1$ qui la contiennent à isomorphisme près, d'où la détermination de toutes les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $n + 1$ à partir de celles de dimension n. Un point délicat est la séparation en types non-isomorphes des séries obtenues. A ce sujet, on a le résultat partiel suivant, qu'on utilisera implicitement dans la suite, et dont nous omettons la démonstration.

LEMME 2. *Soit g une algèbre de Lie nilpotente et δ, δ' deux dérivations nilpotentes de g. Il existe un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\tilde{g}_\delta = \mathbb{R}\delta \oplus g$ sur l'algèbre de Lie $\tilde{g}_{\delta'} = \mathbb{R}\delta' \oplus g$ laissant g stable si et seulement si il existe un automorphisme φ de g et $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tels que $\delta' = k\,\varphi^{-1}\,\delta\,\varphi$* mod ad (g).

4.2. Algèbres nilpotentes de dimension $\leqslant 5$

4.2.1. Dimension 3: La seule algèbre de Lie nilpotente de dimension 2 étant $(g_1)^2$, on peut supposer $\delta = 0$ ou $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où respectivement $(g_1)^3$ ou n.

4.2.2. Dimension 4: Types issus de $(g_1)^2$: $(g_1)^4$, $n \times g_1$, g_4.

Types issus de n: si $\delta \neq 0$, on peut supposer $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (avec $[X_1, X_2] = X_3$) d'où g_4.

4.2.3. Dimension 5. On détermine les types autres que les produits directs.

Types issus de $(g_1)^4$: la suite des invariants de similitude de δ étant (5) ou (3, 2), on obtient $g_{5,5}$ ou $g_{5,2}$.

Types issus de $n \times g_1$: dans la base $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$, $[X_1, X_2] = X_3$, on a $\delta = \begin{pmatrix} A & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$, A matrice 2×2 nilpotente, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On obtient les algèbres suivantes: $1/\ A=0$ i) $\alpha=\beta=0,\ \gamma=1: \mathfrak{g}_{5,1}$; ii) $\alpha=1,\ \beta=0: \mathfrak{g}_{5,2}$ pour $\gamma=0$, $\mathfrak{g}_{5,3}$ pour $\gamma=1$. $2/\ A\neq 0$. On peut supposer $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, d'où: $\mathfrak{g}_{5,4}$ si $\beta\neq 0$, $\gamma=0$; $\mathfrak{g}_{5,6}$ si $\beta\neq 0, \gamma\neq 0$; $\mathfrak{g}_{5,3}$ si $\beta=0$.

Types issus de $\mathfrak{g}_4$: on a $\delta=\begin{pmatrix}0&0&&\\ \alpha&0&&0\\ 0&0&&\\ 0&\beta&&0\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, donc $\tilde{\mathfrak{g}}_6$ contient une sous-algèbre isomorphe à $(\mathfrak{g}_1)^4$ ou $n\times\mathfrak{g}_1$ et les types sont déjà obtenus.

Tableau 2

Algèbre de dimension 4	*Algèbres de dimension 5 la contenant à isomorphisme près*
$(\mathfrak{g}_1)^4$	$(\mathfrak{g}_1)^5$; $\mathfrak{g}_{5,5}$; $\mathfrak{g}_{5,2}$; $(\mathfrak{g}_1)^2\times n$, $\mathfrak{g}_4\times\mathfrak{g}_1$
$n\times\mathfrak{g}_1$	$n\times(\mathfrak{g}_1)^2$; $\mathfrak{g}_4\times\mathfrak{g}_1$; $\mathfrak{g}_{5,j}$ $j\neq 5$
$\mathfrak{g}_4$	$\mathfrak{g}_4\times\mathfrak{g}_1$; $\mathfrak{g}_{5,j}$ $j=3,5,6$

4.3. Algèbres nilpotentes de dimension 6

On détermine, à partir des algèbres de dimension 5, les types d'isomorphismes d'algèbres de dimension 6 autres que les produits directs. δ désigne toujours une dérivation nilpotente de l'algèbre de dimension 5 considérée, modulo une dérivation intérieure et un facteur réel $\neq 0$.

4.3.1. Types issus de $(\mathfrak{g}_1)^5$

La suite des invariants de similitude de δ étant (5) ou (3, 2) on obtient les types 2 et 1 de Morozov.

4.3.2. Types issus de n x $(\mathfrak{g}_1)^2$

Dans la base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ avec $[e_1,e_2]=e_5$, on a $\delta=\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A}} & 0&0&0\\ && 0&0&0\\ \alpha&\gamma&\multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{B}}&0\\ \beta&\lambda&&&0\\ 0&0&\mu&\nu&0\end{pmatrix}$ avec A, B nilpotentes, $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}$.

La discussion se ramène aux cas suivants:

1er cas: $B = 0$. 1/ $A = 0$ i) $\mu = \nu = 0$: on peut supposer $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\lambda = 1$, d'où le type 3 de Mozorov. ii) $\mu = 1$, $\nu = 0$: si $\alpha = \gamma = 0$, pour $\beta = 0$ on peut supposer $\lambda = 1$ d'où le type 4, et pour $\beta = 1$, on retrouve le type 4; si $\alpha = 1$ et $\gamma = 0$, on peut supposer $\lambda \neq 0$ d'où le type 6. 2/ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On peut supposer $\mu = 1$, $\nu = 0$ avec $\alpha = \gamma = 0$, $\beta \neq 0$ ou $\alpha = 0$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0$ qui donnent tous deux le type 9.

2ème cas: $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 1/ $\mu = \nu = 0$, $\alpha = \gamma = 0$, i) $A = 0$: on peut supposer $\beta = 1$, $\lambda = 0$ d'où le type 7. ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: si $\beta = 0$, on a le type 7 pour $\lambda = 0$ et 8 pour $\lambda = 1$; si $\beta \neq 0$, on peut supposer $\lambda = 0$ et $\beta = 1$ d'où le type 11. 2/ $\mu = 0$, $\nu = 1$ redonne les types 7, 8, 11. 3/ $\mu = 1$, $\nu = 0$, $\alpha = \gamma = 0$. i) $A = 0$ donne les types 12 et 17 suivant que β et λ sont tous deux nuls ou non. ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: si $\beta = \lambda = 0$ on a le type 13, si $\beta = 0$, $\lambda \neq 0$ le type 15 et si $\beta \neq 0$ le type 19.

4.3.3. Types issus de $g_4 \times g_1$

On a ici $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$ et

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \nu \\ \gamma & \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\nu = 0$, la sous-algèbre $\mathfrak{a}$ de $\tilde{g}_6$ de base $(\delta, e_i, 2 \leqslant i \leqslant 5)$ est isomorphe à $n \times (g_1)^2$ ou $(g_1)^5$. Les types correspondants sont donc déjà connus et la forme de ad(e_1) montre qu'il s'agit de types 6, 7, 8, 11, 1 et 2. On peut donc supposer $\nu = 1$ et $\mu = 0$. Si $\lambda \neq 0$, $\gamma = 0$, on a le type 14 pour $\alpha = 0$ et le type 18 pour $\alpha = 1$; si $\lambda = 0$, $\mathfrak{a} \cong n \times (g_1)^2$, les types sont connus et il s'agit des types 7, 11, 12 et 13.

4.3.4. Types issus de $g_{5,1}$

On a ici $[e_1, e_2] = [e_3, e_4] = e_5$.

$$\delta = \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & A & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } A \text{ est nilpotente de la forme } \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{X} & -d & b \\ & & c & -a \\ \hline a & b & \multicolumn{2}{c}{Y} \\ c & d & & \end{array}\right),$$

$Tr(X) = Tr(Y) = 0$. On prend une base $\mathscr{B}' = (e_i', 1 \leqslant i \leqslant 4)$ où A a la forme de Jordan.

1/ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 1$. Dans $\mathscr{B}'$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $[e_i', e_j'] = \alpha_{ij}\, e_5$ $1 \leqslant i, j \leqslant 4$. Les seuls α_{ij} non nécessairement nuls sont α_{14}, α_{34} et $\alpha_{23} = -\alpha_{14}$.

Le seul cas possible est $\alpha_{14} \neq 0$ qui se ramène à $\alpha_{14} = -1$, $\alpha_{34} = 0$ et donne le type 21.

2/ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 2$. La suite des invariants de similitude de A étant nécessairement $(2, 2)$, on a dans $\mathscr{B}'$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et les relations

$[e_1', e_2'] = \alpha e_5$, $\quad [e_1', e_4'] = \beta e_5$, $\quad [e_2', e_3'] = -\beta e_5$, $\quad [e_2', e_4'] = \gamma e_5$. $\quad [e_3', e_4'] = \lambda e_5$

avec $\alpha\lambda \neq \beta^2$. Si $\alpha = 1$ la sous-algèbre de $\tilde{g}_\delta$ de base $(\delta, e_1', e_2', e_3', e_5)$ est isomorphe à $g_4 \times g_1$ donc le type est connu et c'est le type 14_{-1}; si $\alpha = 0$ on peut supposer $\beta = 1$ et l'on retrouve de façon analogue le type 14_{-1}.

3/ $\dim(\operatorname{Ker} A) = 3$. De façon analogue au cas précédent, on retrouve le type 12 en utilisant une sous-algèbre isomorphe à $n \times (g_1)^2$.

4.3.5. Types issus de $g_{5,5}$

Dans ce cas, $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$.

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Si $\beta = \gamma = 0$ ou $\beta = 0$ et $\gamma \neq 0$, $\tilde{g}_\delta$ contient une sous-algèbre isomorphe à $(g_1)^5$ ou $n \times (g_1)^2$ et l'on retrouve les types 1, 2, 17 et 19. Supposons donc $\beta = 1$.

1/ $\alpha = 0$. Notons $\tilde{g}_\gamma$ au lieu de $\tilde{g}_\delta$. $\tilde{g}_0$ est le type 16. Pour $\gamma \neq 0$, il n'existe pas d'isomorphisme de $\tilde{g}_0$ sur $\tilde{g}_\gamma$ laissant stable g, mais il en existe ne laissant pas stable g, par exemple celui défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma^2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans les bases respectives $(\delta, (e_i))$ de $\tilde{g}_0$ et $\tilde{g}_\gamma$. 2/ Si $\alpha = 1$, la matrice ci-dessus ramène à $\gamma = 0$, i.e. au type 20.

4.3.6. Types issus de $g_{5,2}$

Dans ce cas, $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_3] = e_5$ et

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \multicolumn{2}{c}{A} & 0 & 0 \\ \beta & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \multicolumn{2}{c}{A} \\ 0 & \lambda & \mu & & \end{pmatrix}, A \text{ matrice } 2 \times 2 \text{ nilpotente.}$$

1er cas: $A = 0$. si $\lambda = 0$ ou si $\lambda = 1$ et $\gamma = 0$, $\tilde{g}_\delta$ contient un produit direct de dimension 5 donc les types sont connus et il s'agit des types 1, 4, 6, 7, 8 et 9. Supposons donc $\lambda = 1$ et $\gamma \neq 0$. i) $\alpha = \beta = 0$: pour $\mu = 0$ on a le type 5 si $\gamma < 0$ et $n \times n$ si $\gamma > 0$; prenons alors $\mu = 1$ et notons $\tilde{g}_{(\gamma,\mu)}$ au lieu de $\tilde{g}_\delta$; il existe un isomorphisme $\psi : \tilde{g}_{(\gamma',0)} \to \tilde{g}_{(\gamma,1)}$ dont la matrice dans les bases respectives $(\delta, (e_i))$ de $\tilde{g}_{(\gamma',0)}$ et $\tilde{g}_{(\gamma,1)}$ est triangulaire si et seulement si $\gamma \neq -\dfrac{1}{4}$ et l'on peut alors prendre $\gamma' = \pm 1$ où $\pm = \operatorname{sgn}\left(\gamma + \dfrac{1}{4}\right)$ avec pour matrice de ψ:

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\xi}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma\xi}{\gamma'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi}{2\gamma'} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma\xi}{\gamma'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi}{2\gamma'} & 1 \end{pmatrix} \qquad \xi = \sqrt{\frac{\gamma'}{\gamma + \frac{1}{4}}}.$$

Pour $\gamma \neq -\frac{1}{4}$, on est ainsi ramené à $\mu = 0$, $\gamma = \pm 1$. Pour $\gamma = -\frac{1}{4}$, on a un isomorphisme de $\tilde{g}_{(0,0)}$ sur $\tilde{g}_{(\gamma,1)}$ laissant g stable par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On est donc ramené dans ce cas à $\gamma = 0$ avec le type 4.

ii) $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

On a une algèbre de graduation (3, 2, 1) si $\beta^2\gamma = \alpha(\alpha + \beta\mu)$ et de graduation (3, 1, 2) sinon. Dans le premier cas, la sous-algèbre de base (δ, e_1, $\alpha e_2 + \beta e_3$, e_4, e_5) est isomorphe à $g_4 \times g_1$ et en examinant l'action de $\alpha e_3 - \beta e_2$, on a les types 1, 6 et 7. Supposons donc $\beta^2\gamma \neq \alpha(\alpha + \beta\mu)$ et notons $\tilde{g}_{(\alpha,\beta,\gamma,\mu)}$ au lieu de $\tilde{g}_\delta$. $\tilde{g}_{(1,0,-1,0)}$ est le type 10, et $\tilde{g}_{(-1,0,1,0)}$ est le type 8 déjà obtenu. Si $\mu^2 + 4\gamma \neq 0$, la matrice

$$\operatorname{diag}(T, M, M)$$

où $T = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix}$, $\quad M = \epsilon\, \xi \begin{pmatrix} \alpha & \beta\gamma\,\xi + \alpha\eta \\ \beta & \xi(\alpha + \beta\mu) + \beta\eta \end{pmatrix}$

$$\eta = \frac{|\mu|}{\sqrt{|\mu^2 + 4\gamma|}} \qquad \epsilon = -\operatorname{sgn}(\mu^2 + 4\gamma)$$

ξ racine commune aux 2 équations à l'inconnue $X \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \gamma X^2(\alpha + \beta\mu) + 2\beta\gamma X\eta + \alpha(\eta^2 + \epsilon) = 0 \\ X^2(\beta\gamma + \mu(\alpha + \beta\mu)) + 2X\eta(\alpha + \beta\mu) + \beta(\eta^2 + \epsilon) = 0 \end{cases}$$

représente, dans les bases correspondantes $(\delta, (e_i))$, un isomorphisme de $\tilde{g}_{(1,0,-1,0)}$ sur $\tilde{g}_{(\alpha,\beta,\gamma,\mu)}$ pour $\mu^2 + 4\gamma < 0$, et de $\tilde{g}_{(-1,0,1,0)}$ sur $\tilde{g}_{(\alpha,\beta,\gamma,\mu)}$ pour $\mu^2 + 4\gamma > 0$, laissant stable $g_{5,2}$.

Si $\mu^2 + 4\gamma = 0$, on obtient de façon analogue un isomorphisme de $\tilde{g}_{(1,0,0,0)}$ sur $\tilde{g}_{(\alpha,\beta,\gamma,\mu)}$ donc on est ramené à $\gamma = 0$ avec le type 9.

2ème cas: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $\gamma \neq 0$, ou $\gamma = 0$ et $\mu \neq 0$, $\tilde{g}_\delta$ contient $g_{5,5}$ ou $g_4 \times g_1$ donc les types sont connus et il s'agit des types 16, 20, 14, 18. Si $\gamma = \mu = 0$, $\tilde{g}_\delta$ contient $g_{5,1}$ pour $\alpha = 0$ et l'on retrouve le type 14_{-1}, et pour $\alpha = 1$ on obtient le type 18_{-1}.

4.3.7. Types issus de $g_{5,6}$

Dans ce cas: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_5$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

La sous-algèbre de $\tilde{g}_\delta$ de base $(\delta, (e_i)\ 2 \leqslant i \leqslant 5)$ est isomorphe à $n \times (g_1)^2$ si $\beta = \alpha = 0$, $g_{5,1}$ si $\beta = 0$ et $\alpha = 1$, $g_{5,2}$ si $\beta = 1$ et $\alpha = 0$, et l'on retrouve les types 15, 21, 16. Supposons donc $\beta = 1$, $\alpha \neq 0$. Alors la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha^{-2}(1 + \alpha\gamma) & 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^{-2} & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^{-3} & \alpha^{-2} \end{pmatrix}$$

représente un isomorphisme de $\tilde{g}_\delta$ sur le type 22 dans leurs bases respectives $(\delta, (e_i))$ et $(X_1, \ldots, X_6)$.

4.3.8. Types issus de $g_{5,3}$

$[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_5$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{R}$$

1) $\alpha = \gamma = 0$. Si $\lambda = 0$, la sous-algèbre de $\tilde{g}_\delta$ de base $(e_1, e_4, e_5, \delta, e_2)$ est isomorphe à $n \times (g_1)^2$ et l'action de e_3 montre qu'on a le type 13, dont les relations de commutation sont

$[X_1, X_2] = X_5$, $[X_1, X_3] = X_4$, $[X_1, X_4] = X_6$, $[X_2, X_5] = X_6$

avec le plongement de $g_{5,3}$ défini par:

$$e_1 = -X_2, \quad e_2 = X_4, \quad e_3 = X_1, \quad e_4 = X_5, \quad e_5 = -X_6.$$

Si $\lambda = 1$, la sous-algèbre de base $(e_1, \delta + e_3, e_4, e_5, e_2)$ est isomorphe à $g_4 \times g_1$ et si $\beta \neq 0$ on a en posant

$$X_1 = e_1, \quad X_2 = \delta, \quad X_3 = \delta + e_3, \quad X_4 = e_4, \quad X_5 = \beta e_2, \quad X_6 = e_5$$

le type 14 de relation de commutation

$[X_1, X_3] = X_4$, $[X_1, X_4] = X_6$, $[X_2, X_3] = X_5$, $[X_2, X_5] = \beta X_6$

avec le plongement de $g_{5,3}$ défini par

$$e_1 = X_1, \quad e_2 = \frac{1}{\beta} X_5, \quad e_3 = X_3 - X_2, \quad e_4 = X_4, \quad e_5 = X_6.$$

Si $\lambda = 1$ et $\beta = 0$, la sous-algèbre de base $(\delta, e_2, e_5, e_3 + \delta, e_4) \cong n \times (g_1)^2$ donne le type 12.

2) $\gamma = 0$, $\alpha = 1$. Si $\lambda = 0$, les sous-algèbres $\left(-\beta e_1 + e_3, \delta - e_1, e_4, -\beta e_5, e_2 - \frac{1}{\beta} e_4\right)$ ou $(-\delta - e_3, \delta - e_1, e_2 - e_4, 2e_5, e_2 + e_4)$ isomorphes à $g_4 \times g_1$ pour $\beta \neq 0$, et $\beta = 0$ respectivement conduisent au type 14_{-1}. Si $\lambda \neq 0$, pour $\beta \neq 0$ la sous-algèbre $\left(\delta - e_1, e_3 + \frac{1}{\lambda}(\delta - e_1), \beta e_2 - e_4, \beta\lambda e_5, e_4\right) \cong g_4 \times g_1$ donne les

types 14 si $\lambda\beta \neq 1$, et 13 si $\lambda\beta = 1$; et pour $\beta = 0$, la sous-algèbre $\left(\delta, e_1 - \delta - \lambda e_3, e_2, \lambda e_5, e_4 - \frac{e_2}{\lambda}\right) \cong g_4 \times g_1$ redonne le type 14_{-1}.

3) $\gamma \neq 0$, $\alpha = 1$. Si $\beta \neq 0$, $\{\delta, e_3\}$ engendre une sous-algèbre isomorphe à $g_{5,6}$ qui donne le type 22. Si $\beta = 0$, $\{e_1, e_1 - \delta\}$ engendre une sous-algèbre isomorphe à $g_{5,5}$ si $\lambda = 0$ et $g_{5,6}$ si $\lambda \neq 0$, d'où respectivement les types 16 et 22.

4) $\gamma \neq 0$, $\alpha = 0$. Si $\beta \neq 0$, $\{\delta - e_1, e_3\}$ engendre une sous-algèbre isomorphe à $g_{5,6}$ donnant le type 22, et si $\beta = 0$, $(\delta, e_2, e_3, e_4, e_5) \cong g_{5,2}$ donne le type 16.

4.3.9. Types issus de $g_{5,4}$

$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_5$

$$\delta = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \gamma & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \; A \end{pmatrix}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, A matrice 2×2 nilpotente.

Soit, dans $\tilde{g}_6$, a la sous-algèbre de base $(\delta, e_2, e_3, e_4, e_5)$. Si $A = 0$, $a \cong n \times (g_1)^2$ pour $\beta = 0$ et $a \cong g_{5,2}$ pour $\beta \neq 0$ et l'on retrouve les types 8, 9 et 10. Si $A \neq 0$, on peut supposer $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a \cong g_{5,1}$ ou $a \cong g_{5,3}$ et l'on retrouve les types 21 et 22.

4.3.10. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant:

Tableau 3

Algèbre de dimension 5	*Algèbres de dimension 6 la contenant*
$(g_1)^5$	$\underset{\sim}{1}$, $\underset{\sim}{2}$, $(g_1)^6$, $n \times (g_1)^3$, $g_4 \times (g_1)^2$, $g_1 \times g_{5,j}$ $(j = 2, 5)$
$n \times (g_1)^2$	$\underset{\sim}{3}$, $\underset{\sim}{4}$, $\underset{\sim}{6}$, $\underset{\sim}{7}$, $\underset{\sim}{8}$, $\underset{\sim}{9}$, $\underset{\sim}{11}$, $\underset{\sim}{12}$, $\underset{\sim}{13}$, $\underset{\sim}{15}$, $\underset{\sim}{17}$, $\underset{\sim}{19}$, $n \times (g_1)^3$, $n \times n$, $g_4 \times (g_1)^2$, $g_1 \times g_{5,j}$ $(j \neq 5)$
$g_4 \times g_1$	1, 2, 6, 7, 11, 12, 13, $\underset{\sim}{14}$, $\underset{\sim}{18}$, $(g_1)^2 \times g_4$, $g_1 \times g_{5,j}$ $(j = 3, 5, 6)$

Algèbre de dimension 5	*Algèbres de dimension 6 la contenant*
$g_{5,1}$	1, 2, 7, 12, 14_{-1}, $\underset{\sim}{21}$, $n \times n$, $g_1 \times g_{5,1}$
$g_{5,5}$	1, 2, $\underset{\sim}{16}$, 17, 19, $\underset{\sim}{20}$, $g_1 \times g_{5,5}$
$g_{5,2}$	1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\underset{\sim}{10}$, 14, 16, 18, 20, $n \times n$, $g_1 \times g_{5,2}$
$g_{5,6}$	15, 16, 21, $\underset{\sim}{22}$, $g_1 \times g_{5,6}$
$g_{5,3}$	12, 13, 14, 16, 22, $g_1 \times g_{5,3}$
$g_{5,4}$	8, 9, 10, 21, 22, $g_1 \times g_{5,4}$

On a souligné $\sim$ les types de Morosov à leur première apparition dans la lecture du tableau 3.

4.4. Il n'existe qu'une seule algèbre stratifiée de dimension 6 contenant $g_{5,6}$, à savoir le type 21. En revanche, $g_{5,3}$ est contenue dans les 3 types stratifiés 13, 14_1, 14_{-1}, qui contiennent aussi l'unique algèbre de dimension 5 $g_4 \times g_1$ ayant même graduation que $g_{5,3}$.

La solution des problèmes formulés en 3.2 n'est donc pas unique.

5. RÉSULTATS EN DIMENSION 7

5.1. On détermine ici pour chaque algèbre de dimension 6 nilpotente la série des algèbres nilpotentes de dimension 7 (autres que les produits directs) la contenant à isomorphisme près, au moyen de relations de commutation dépendant de paramètres réels arbitraires.

Il suffit pour cela de donner la forme que l'on peut supposer d'après le lemme 2 pour une dérivation nilpotente. Les résultats sont donnés par le Tableau 4. On notera que ce problème n'est pas résolu par la classification de [9] basée sur la méthode de Morosov.

5.2. Exemples

5.2.1. Dans le cas $n \times n$, la séparation en types non-isomorphes conduit aux 8 algèbres non-isomorphes suivantes (on indique entre parenthèses les dimensions de la série centrale descendante).

(i) $[X_1, X_3] = X_7$, $[X_2, X_3] = X_6$, $[X_4, X_5] = X_7$ (7, 2)

(ii) $[X_1, X_3] = X_7$, $[X_1, X_5] = X_6$, $[X_2, X_3] = X_6$, $[X_4, X_5] = X_7$ (7, 2)

Ces 2 algèbres contiennent chacune les idéaux abéliens maximaux $\{X_1, X_2, X_4, X_6, X_7\}$ et $\{X_3, X_5, X_6, X_7\}$ de dimension 5 et 4.

(iii) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_7,\ [X_2, X_3] = X_6,\ [X_4, X_5] = X_7$ (7, 3, 2)

(iv) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_7,\ [X_1, X_5] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_6,$
$[X_4, X_5] = X_7$ (7, 3, 2)

(v) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_5] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_6,\ [X_4, X_5] = X_7$ (7, 3, 1)

(vi) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_7,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_1, X_5] = X_6,$
$[X_2, X_3] = X_6,\ [X_4, X_5] = X_7$ (7, 4, 2)

(vii) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_7,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_2, X_3] = X_6,$
$[X_4, X_5] = X_7$ (7, 4, 2)

(viii) $[X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_4] = X_5,\ [X_2, X_3] = X_6,\ [X_4, X_5] = X_7$ (7, 4, 2)

Les algèbres (i), (v) et (viii) ne figurent pas dans la classification de [9] et ne sont pas des produits directs.

5.2.2. Avec $\mathfrak{g}_{5,3} \times \mathfrak{g}_1$ on obtient en particulier la famille $\mathfrak{g}_t^{(1)}$ ($t \in \mathbb{R}$):

$$[X_1, X_4] = X_7,\ [X_2, X_5] = X_7,\ [X_3, X_6] = X_7,\ [X_1, X_2] = X_4 + tX_5,$$
$$[X_1, X_3] = X_6,\ [X_2, X_3] = X_5 \qquad (7, 4, 1)$$

d'algèbres stratifiées deux à deux non-isomorphes. On a donc l'exemple d'une algèbre non stratifiée de dimension 6 qui se plonge dans une infinité d'algèbres stratifiées de dimension 7 non-isomorphes.

5.2.3.

a) Avec le type 6, les relations de commutation du produit semi-direct $\tilde{\mathfrak{g}}_{(a,b,c,\alpha,\beta,\eta,\lambda,\mu)}$ sont:

$$[X_1, X_2] = aX_3 + bX_4 + \alpha X_5 + \eta X_7$$
$$[X_1, X_3] = \beta X_5 + \lambda X_7$$
$$[X_1, X_4] = cX_3 - aX_5 + \mu X_7$$
$$[X_1, X_5] = cX_7$$
$$[X_1, X_7] = (\beta - b)X_6$$
$$[X_2, X_3] = X_7,\ [X_2, X_4] = X_5,\ [X_2, X_5] = X_6,\ [X_3, X_4] = X_6$$

Tableau 4. Sauf mention contraire, les relations de commutation sont celles du tableau 1 (La base étant canonique dans le cas des produits directs)

$$(g_1)^6:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$n\times(g_1)^3:\ \left(\begin{array}{cc|cccc} 0&0& & & & \\ 1&0& & &0& \\ \hline 0&0&0&\xi_7&\xi_8&\xi_9\\ \xi_1&\xi_4&0& &A& \\ \xi_2&\xi_5&0& & & \\ \xi_3&\xi_6&0& & & \end{array}\right)$$

$$A=0,\ \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$$

$$g_4\times(g_1)^2:\ \begin{pmatrix} 0&0&0& & & \\ \alpha&0&0& &0& \\ 0&0&0& & & \\ 0&\beta&0&0&\xi_1&\xi_2\\ \gamma&\lambda&0&0&0&\epsilon\\ \mu&\nu&0&0&0&0 \end{pmatrix}\quad \epsilon=0,1.$$

$n\times n$

$[x_1,x_2]=x_5$

$[x_3,x_4]=x_6$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} A& &0& &0\\ \hline 0& &B& &0\\ \hline 0&0&\lambda&\mu& \\ \alpha&\beta&0&0&0 \end{array}\right)\quad \text{i) } A=B=0;\ \ \text{ii) } A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B=0;\ \ \text{iii) } A=B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

$$g_{5,1}\times g_1:\text{i)}\ \begin{pmatrix} 0&1&0& & & \\ 0&0&1& &0& \\ 0&0&0& & & \\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\xi_2\\ 0&0&0&\xi_1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii)}\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\xi_3\\ \xi_1&0&\xi_2&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$[e_1,e_2]=\alpha e_5,\ [e_1,e_4]=\beta e_5$

$[e_2,e_3]=-\beta e_5,\ [e_2,e_4]=\gamma e_5$

$[e_3,e_4]=\lambda e_5,\ \alpha\lambda-\beta^2\neq 0;$

$$\text{iii)}\ \begin{pmatrix} 0&1&0& & & \\ 0&0&0& &0& \\ 0&0&0& & & \\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\xi_4\\ \xi_1&0&\xi_2&\xi_3&0&0 \end{pmatrix}$$

$[e_1,e_2]=\alpha e_5,\ [e_2,e_3]=\beta e_5$

$[e_2,e_4]=\gamma e_5,\ [e_3,e_4]=\lambda e_5$

$\alpha\lambda\neq 0$

$$g_{5,2}\times g_1:\ \begin{pmatrix} 0&0&0& & & \\ \alpha&0&0& &0& \\ \beta&\epsilon&0& & & \\ 0&0&\gamma&0&0&\xi_4\\ 0&\lambda&\mu&\epsilon&0&\xi_5\\ \xi_1&\xi_2&\xi_3&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$\epsilon=0,1.$

$$g_{5,3}\times g_1:\ \begin{pmatrix} 0&0&0& & & \\ \alpha&0&\beta& &0& \\ \gamma&0&0& & & \\ 0&\gamma&0&0&0&0\\ 0&\lambda&0&\alpha&0&\xi_4\\ \xi_1&\xi_2&\xi_3&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$[e_1,e_3]=e_4$

$[e_1,e_4]=e_5$

$[e_2,e_3]=e_5$

$$g_{5,4}\times g_1:\ \begin{pmatrix} 0&0&0& & & \\ \epsilon&0&0& &0& \\ 0&0&0& & & \\ \alpha&\beta&0&0&0&\xi_3\\ \gamma&0&0&\epsilon&0&\xi_4\\ \xi_1&\xi_2&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$\epsilon=0,1.$

$$g_{5,5}\times g_1:\ \begin{pmatrix} 0&0&0& & & \\ \alpha&0&0& &0& \\ 0&0&0& & & \\ 0&\beta&0&0&0&0\\ 0&\gamma&\beta&0&0&\xi_3\\ \xi_1&\xi_2&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$g_{5,6}\times g_1:\ \begin{pmatrix} 0&0&0& & & \\ \alpha&0&0& &0& \\ 0&0&0& & & \\ 0&\beta&0&0&0&0\\ 0&\gamma&\beta&\alpha&0&\xi_3\\ \xi_1&\xi_2&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

type 1:

$[e_1,e_2]=e_4$

$[e_1,e_3]=e_5$

$[e_1,e_4]=e_6$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0& & & \\ \alpha&0&0& & & \\ \beta&\gamma&0& & & \\ 0&0&\xi&0&0&0\\ 0&\eta&\mu&\gamma&0&0\\ 0&\lambda&\nu&0&\xi&0 \end{pmatrix}$$

et les paramètres sont des réels quelconques.

$$2:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ 0&0&0&&& \\ 0&\beta&0&0&0&0 \\ 0&\gamma&\beta&0&0&0 \\ 0&\eta&\gamma&\beta&0&0 \end{pmatrix}$$

3: $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_1,e_3]=e_5$, $[e_2,e_3]=e_6$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ 1&0&0&&0& \\ 0&1&0&&& \\ 0&0&\epsilon&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ 1&0&0&&0& \\ 0&0&0&&& \\ 0&0&\lambda&0&0&0 \\ 0&\beta&\mu&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix};\ \left(\begin{array}{ccc:c} &0&&0 \\ \hdashline 0&0&\lambda& \\ 0&\beta&\mu&0 \\ \alpha&\gamma&\nu& \end{array}\right)$$

$\epsilon=0,1.$

4: $[e_1,e_2]=e_5$, $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=-e_6$

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \epsilon&0&0&&0& \\ \alpha&\beta&0&&& \\ \gamma&\lambda&\epsilon&0&0&0 \\ 0&0&\mu&\xi&0&0 \\ 0&0&\nu&\eta&\alpha+\lambda&0 \end{pmatrix}$$

$\epsilon=0,1.$

$$5:\ \left(\begin{array}{ccc:ccc} &0&&&0& \\ \hdashline \alpha&0&\gamma&0&0&0 \\ \beta&0&\lambda&0&0&0 \end{array}\right);\ \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ \beta&0&0&&& \end{pmatrix}$$

$$6:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ a&0&c&&0& \\ b&0&0&&& \\ \alpha&\beta&-a&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&\beta-b \\ \eta&\lambda&\mu&c&0&0 \end{pmatrix}$$

$$7:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \alpha&0&\beta&&0& \\ 0&0&0&&& \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&\gamma&\lambda&0&0&0 \\ \mu&\nu&0&\alpha&0&0 \end{pmatrix}$$

$$8:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ \beta&\lambda&0&&& \\ 0&\nu&0&0&\lambda&0 \\ \gamma&\mu&0&0&0&0 \\ \eta&0&-\gamma&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$9:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ 0&0&0&&& \\ 0&\eta&0&0&0&0 \\ \beta&\gamma&0&0&0&0 \\ 0&\lambda&\gamma&\alpha&\mu&0 \end{pmatrix}$$

$$10:\ \begin{pmatrix} &0&&&0& \\ \alpha&\beta&0&0&0&0 \\ 0&\gamma&-\alpha&\lambda&0&0 \\ 0&\eta&-\beta&\mu&0&0 \end{pmatrix}$$

$$11:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ 0&0&0&&& \\ \beta&\gamma&0&0&0&0 \\ 0&\lambda&\gamma&0&0&0 \\ \eta&0&0&\alpha&0&0 \end{pmatrix}$$

$$12:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ -\gamma&0&0&&0& \\ \alpha&0&0&&& \\ 0&\beta&0&0&\gamma&0 \\ \beta&\epsilon&0&0&0&0 \\ 0&0&\eta&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$\epsilon=0,1.$

$$13:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ \beta&-\alpha&0&&& \\ 0&\gamma&0&0&-\alpha&0 \\ \gamma&\eta&0&0&0&0 \\ 0&0&\lambda&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$14:\ \begin{pmatrix} &0&&&0& \\ \alpha&\beta&0&&& \\ \pm\beta&0&0&&0& \\ 0&0&\lambda&&& \end{pmatrix}\qquad \pm=\begin{cases} +14_1 \\ -14_{-1} \end{cases}$$

$$15:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ \beta&-\alpha&0&&& \\ 0&\gamma&0&0&-\alpha&0 \\ \lambda&\mu&0&0&0&0 \\ 0&0&\gamma-\lambda&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$16:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ 0&0&0&&0& \\ \alpha&0&0&&& \\ 0&\alpha&0&&& \\ \beta&0&0&&0& \\ 0&0&\gamma&&& \end{pmatrix}$$

$$17:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ \eta&0&0&&& \\ 0&\lambda&0&0&-\alpha&0 \\ \beta&\gamma&0&0&0&0 \\ 0&0&\lambda-\beta&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$18:\ \begin{pmatrix} &0&&&0& \\ \alpha&\beta&0&&& \\ -\lambda&0&0&&0& \\ 0&0&\beta\pm\lambda&&& \end{pmatrix}\qquad \pm=\begin{cases} +18_1 \\ -18_{-1} \end{cases}$$

$$19:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ 0&0&0&&& \\ \beta&\gamma&0&0&0&0 \\ 0&\lambda&\gamma&0&0&0 \\ 0&0&\mu&\alpha+\gamma&0&0 \end{pmatrix}$$

$$20:\ \begin{pmatrix} 0&0&0&&& \\ 0&0&0&&0& \\ \alpha&0&0&&& \\ \beta&\alpha&0&&& \\ \gamma&0&0&&0& \\ 0&0&-\beta&&& \end{pmatrix}$$

$$21:\ \begin{pmatrix} &0&&&0& \\ 0&0&0&&& \\ \alpha&0&\beta&&0& \\ 0&\gamma&0&&& \end{pmatrix}$$

$$22:\ \begin{pmatrix} &0&&&0& \\ 0&0&0&&& \\ \alpha&0&0&&0& \\ 0&\beta&0&&& \end{pmatrix}$$

b) Considérons maintenant l'exemple de [1], p. 122, ex. 18: soit le crochet alterné défini sur l'espace vectoriel g de base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 7}$ par $[e_i, e_j] = \alpha_{ij}\, e_{i+j}$, $1 \leqslant i < j \leqslant 7$, $i + j \leqslant 7$, avec tous les $\alpha_{ij} \neq 0$.

On peut supposer $\alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = \alpha_{25} = 1$. Alors $g \setminus \{e_1\}$ est une algèbre de Lie du type 6 et dans la base $(e_2, -e_4, e_3, e_5, e_7, -e_6)$

$$\operatorname{ad} e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -\alpha_{13} & & 0 & \\ \alpha_{12} & 0 & 0 & & & \\ 0 & -\alpha_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_{16} \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{15} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc g est une algèbre de Lie si et seulement si $\alpha_{16} = \alpha_{12} + \alpha_{14}$ et $\alpha_{15} = \alpha_{13}$, et alors $g = \tilde{g}_{(0,b,c,0,1,0,0,0)}$ avec $b = -\alpha_{12}\,\alpha_{14}^{-1}$, $c = \alpha_{13}\,\alpha_{14}^{-1}$, $b \neq 1$.

On aurait pu supposer $\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = \alpha_{16} = \alpha_{34} = 1$ au lieu de $\alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = \alpha_{25} = 1$. Alors $g \setminus \{e_2\}$ est du type 19 donc g est une algèbre de Lie si et seulement si $\alpha_{24} = \alpha_{23}$ et $\alpha_{25} = \alpha_{24} - \alpha_{12}$. Par ailleurs, tous les produits semi-directs issus du type 19 sont déjà obtenus à partir du type 6, ou d'un produit direct; aucun n'est stratifié, mais le type 19 est contenu dans l'algèbre stratifiée de dimension 8 suivante:

$$[X_1, X_i] = X_{i+1}, \quad 2 \leqslant i \leqslant 7, \quad [X_2, X_7] = X_8, \quad [X_3, X_6] = -X_7, \quad [X_4, X_5] = X_8.$$

c) Le série centrale descendante de $\tilde{g}_{(a,b,c,\alpha,\beta,\eta,\lambda,\mu)}$ a les dimension suivantes:

(1)	$c \neq 0,\ b \neq 0,\ \beta = 1,\ b \neq 1$	(7, 5, 4, 3, 2, 1)
(2)	$c \neq 0,\ b = 1,\ \beta = 1,$	(7, 5, 4, 3, 2)
(3)	$c \neq 0,\ b = 1,\ \beta = 0,$	(7, 5, 4, 2, 1)
(4)	$c = 1,\ b = \beta = 0$	(7, 4, 2)
(5)	$c \neq 0,\ b = 0,\ \beta = 1$	(7, 4, 3, 2, 1)
(6)	$c = 0,\ b = 1,\ a^2(\beta - 1) \neq a\lambda + \mu$	(7, 4, 3, 1)
(7)	$c = 0,\ b = 1,\ a^2(\beta - 1) = a\lambda + \mu$	(7, 4, 2, 1)
(8)	$c = b = 0,\ a = 0$	(7, 3, 1)
(9)	$c = b = 0,\ a = 1,\ \beta = 0$	(7, 4, 2)
(10)	$c = b = 0,\ a \neq 0,\ \beta = 1$	(7, 4, 3, 1)

Dans le cas (1), $g = \tilde{g}_{(a,b,c,\alpha,1,\eta,\lambda,\mu)}$ $(c \neq 0,\ b \neq 0,\ 1)$ ne peut être isomorphe qu'à une autre algèbre du même cas $g' = \tilde{g}_{(a',b',c',\alpha',1,\eta',\lambda',\mu')}$ $(c' \neq 0,\ b' \neq 0,\ 1)$ telle que $b' = b$. On peut alors choisir $c' = 1$, $a' = \alpha' = \eta' = \lambda' = \mu' = 0$ et pour isomorphisme de $g' \to g$ la matrice:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{a-\lambda}{2} & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \xi_1^3 & c^2 & \frac{ac}{b} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{b}\right) & \frac{1}{b}(\alpha c + \xi_1^3) & c^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \xi_3^6 & 0 & c\xi_1^3 + \frac{c}{b}(\xi_1^3 + \alpha c) & c^3 & c^2\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{a}{2} + \frac{a}{b}\right) \\
0 & 0 & \xi_3^7 & \frac{1}{b}\left(\eta c + \xi_1^3 \frac{\alpha+\lambda}{2}\right) & \frac{ac^2}{b} & 0 & c^3
\end{pmatrix}$$

avec

$$\xi_1^3 = \frac{a^2}{2b} - \frac{3}{8}a^2 - \frac{a\lambda}{4} + \frac{\lambda^2}{8} - \frac{\alpha c}{2} + \mu\,\frac{1-b}{2}$$

$$\xi_3^6 = \frac{a-\lambda}{2b}\alpha c + \frac{1-b}{b}\eta c + \xi_1^3\left((\alpha+\lambda)\frac{1-b}{b} + \frac{a-\lambda}{2b}\right)$$

$$\xi_3^7 = \frac{c}{b}\left(\frac{a(\lambda+a)}{2} + \alpha c + b\mu + \xi_1^3\right).$$

Le cas (1) se compose donc d'une infinité d'algèbres non-isomorphes $g_t^{(2)} = \tilde{g}_{(0,t,1,0,1,0,0,0)}$ $(t \neq 0,\ 1)$, qui sont celles de [1].

Les autres cas, sauf (6) et (7) donnent des séries finies. Par exemple, le cas (2) se ramène à $c = 1$, $\beta = 1$, $b = 1$, $a = \alpha = \eta = \lambda = \mu = 0$ par la matrice ci-dessus; dans le cas (5), $g = \tilde{g}_{(a,0,c,\alpha,1,\eta,\lambda,\mu)}$ $(c \neq 0)$ est isomorphe à $g' = \tilde{g}_{(a',0,1,0,1,0,0,0)}$, $a' = \begin{cases} 0 & a = 0 \\ -1 & a \neq 0 \end{cases}$, les cas $a = 0$ et $a \neq 0$ n'étant pas isomorphes, et pour $a \neq 0$, on peut prendre pour isomorphisme de $g' \to g$ la matrice:

$$\begin{pmatrix}
-\frac{a}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\xi_1^2 & \frac{a^2}{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{a^4}{c^2} & -a\left(\frac{a\alpha}{c} + \xi_1^4\right) - \frac{a^2}{c}\,\xi_1^2 & 0 & 0 & 0 \\
\xi_1^4 & 0 & 0 & -\frac{a^3}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{a^2}{c}\left(\frac{a\alpha}{c} + \xi_1^4\right) & \xi_4^5 & -\frac{a^5}{c^3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{c}\,\xi_4^5 & -\frac{a^7}{c^4} & \frac{a^4}{c^2}\left(\frac{a\alpha}{c} + \xi_1^4\right) \\
0 & 0 & \frac{\eta a^3}{c^2} & \xi_4^7 & -\frac{a^3}{c}\left(\frac{a\alpha}{c} + \xi_1^4 + \frac{a}{c}\,\xi_1^2\right) & 0 & \frac{a^6}{c^3}
\end{pmatrix}$$

avec

$$\xi_1^2 = \frac{\lambda a}{2c}$$

$$\xi_1^4 = -\frac{a}{c}\left(\alpha + \frac{\lambda a}{2c} + \frac{\lambda^2}{4c} + \frac{\mu}{c}\right)$$

$$\xi_4^5 = -\frac{a^2}{c^2}\left(\eta - \frac{a\alpha}{2} - \frac{\lambda a^2}{4c} - \frac{\mu a}{2c} - \frac{\lambda\alpha}{4} + \frac{\lambda^3}{16c} + \frac{\mu\lambda}{4c}\right)$$

$$\xi_4^7 = \xi_4^5\left(\frac{\lambda}{2} - a\right) + \xi_1^4(a\alpha + c\,\xi_1^4 + a\,\xi_1^2).$$

Dans le cas (7), on trouve en particulier la série infinie $g_t^{(3)}$ $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -1$:

$[X_1, X_2] = X_6$, $[X_1, X_3] = (t+1)\,X_4$, $[X_1, X_4] = X_5$, $[X_1, X_5] = X_7$,
$[X_2, X_3] = tX_5$, $[X_2, X_4] = X_7$, $[X_3, X_6] = X_7$

avec $g_t^{(3)} \cong g_{t'}^{(3)} \Leftrightarrow t = t'$; et dans le cas (6) la série $g_t^{(4)}$

$[X_1, X_2] = X_4$, $[X_1, X_3] = tX_6$, $[X_2, X_4] = (t-1)\,X_5$, $[X_1, X_4] = X_5$,

$$[X_1, X_5] = X_7, \quad [X_2, X_4] = X_6, \quad [X_2, X_6] = X_7, \quad [X_3, X_4] = X_7$$

avec $g_t^{(4)} \cong g_{t'}^{(4)} \Leftrightarrow t' = 1 - t$, i.e.: la série est indexée par $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

5.2.4. Dans le cas 15, $\tilde{g}_{(\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu)}$ est stratifiée si et seulement si $\alpha = 1$, $\mu \neq -1$, $\gamma = \lambda$, $\beta = 0$. Si $\mu \neq 0$, $\tilde{g}_{(1,0,\gamma,\gamma,\mu)}$ est isomorphe à $\tilde{g}_{(1,0,0,0,1)}$ ou $\tilde{g}_{(1,0,0,0,-2)}$ suivant que $\mu > -1$ ou $\mu < -1$, et pour $\mu = 0$ on obtient $\tilde{g}_{(1,0,0,0,0)}$. Il y a donc exactement 3 algèbres stratifiées de dimension 7 contenant le type 15.

5.2.5. Il y a d'autres types qui donnent des séries infinies. Par exemple, les types 4, 17, 20 donnent en particulier

$$\begin{aligned} g_t^{(5)} \ : \ & [X_1, X_2] = X_3,\ [X_1, X_3] = X_5,\ [X_1, X_5] = X_6,\ [X_1, X_6] = X_7, \\ & [X_1, X_4] = X_5,\ [X_2, X_4] = tX_6,\ [X_2, X_5] = (t-1)X_7, \\ & [X_3, X_4] = X_7,\ [X_2, X_3] = (t-1)X_6 \qquad (7, 4, 3, 2, 1) \end{aligned}$$

avec $g_t^{(5)} \cong g_{t'}^{(5)} \Leftrightarrow t = t'$; le type 4 donne encore

$$\begin{aligned} g_t^{(6)} \ : \ & [X_1, X_4] = X_7,\ [X_2, X_5] = X_7,\ [X_3, X_6] = X_7,\ [X_1, X_2] = tX_6, \\ & [X_1, X_3] = (t+1)X_6,\ [X_2, X_3] = X_4,\ t \neq 0, -1 \qquad (7, 4, 1) \end{aligned}$$

avec $g_t^{(6)} \cong g_{t'}^{(6)} \Leftrightarrow t' = -\dfrac{1}{t+1}$ ou $-\dfrac{t+1}{t}$, i.e. $g_t^{(6)}$ est indexée par $]-1, 0[$; les types 9 et 7 donnent en particulier

$$\begin{aligned} g_t^{(7)} \ : \ & [X_1, X_2] = X_4,\ [X_1, X_4] = X_6,\ [X_1, X_3] = X_4 + tX_5, \\ & [X_1, X_5] = X_7,\ [X_2, X_3] = X_5,\ [X_2, X_4] = X_7,\ [X_3, X_5] = X_6 \ (7, 4, 2) \end{aligned}$$

avec $g_t^{(7)} \cong g_{t'}^{(7)} \Leftrightarrow t' = \pm t$.

5.2.6. Pour $1 \leqslant j \leqslant 7$, $g_t^{(j)}$ est l'image par une déformation de paramètre t au sens [5] d'une algèbre $g^{(j)}$. La dimension 7 est donc la plus petite dimension où par déformations d'une algèbre nilpotente il est possible d'obtenir des algèbres 2 à 2 non isomorphes. Dans le cas des algèbres de Lie résolubles, cela se produit déjà en dimension 3: à part $(g_1)^3$ et n, les algèbres résolubles de dimension 3 sont produits semi-directs $\mathbb{R} A \oplus \mathbb{R}^2$ où A est l'une des matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

et l'on a 2 séries de déformations.

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier le Professeur M. Flato pour d'intéressantes discussions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I, Hermann, Paris, 1971.

[2] DAMLAKHI,HELFFER, *Analyticité et itérés*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 2ème série, **13**, 1980, 397 - 403.

[3] J. DIXMIER, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents III*, Canadian J. Math. **10**, 1958, 321 - 348.

[4] FOLLAND, STEIN, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Math. Notes n. 28 Princeton Univ. Press, 1982.

[5] M. GERSTENHABER, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. Math. **79**, n. 1, 1964, p. 59 - 103.

[6] R. GOODMAN, *Nilpotent Lie groups*, Lect. Notes Math. n. 562, Springer Verlag, 1976.

[7] E.M. LUKS, *What is the typical nilpotent Lie algebra*, in «Computers in the study of non associative rings and algebras», Academic Press, 1976, Editors R. Beck and B. Colman.

[8] V.V. MOROSOV, *Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 6 (en Russe)*, Isvestia Vyschih Uchebnyh Zavedenii, Matematika, n. 4, 1958, p. 161 - 171.

[9] E.N. SAFIULLINA, *Classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7 (en Russe)*, Candidates' Works (1964), Math. Mech. Phys. pp. 66 - 69, Izdat. Kazan. Univ. Kazan, 1964.

[10] L.J. SANTHAROUBANE, *Kac-Moody Lie algebras and the classification of nilpotent Lie algebras of maximal rank*, Canad. Journ. of Math. **34**, n. 6, 1982, p. 1215 - 1239.

[11] T. SKJELBRED, T. SUND, *On the classification of nilpotent Lie algebras*, Preprint Univ. Oslo Mathematics n. 8, 1977.

Manuscript received: September 18, 1985

Paper presented by
M. Flato